Письма в ЖЭТФ, том 26, вып. 3, стр. 129 – 133 5 августа 1977 г.

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ В ПЛОСКИХ ГАЛАКТИКАХ – ДВИЖУЩИЕСЯ СОЛИТОНЫ

А.Б.Михайловский, В.И.Петвиашвили, А.М.Фридман

Показано, что во вращающемся гравитирующем диске могут образовываться и распространяться солитоны двух типов: сверхзвуковые и дозвуковые. Сверхзвуковые солитоны способны распространяться только в случае слабой джинсовской неустойчивости диска. Дозвуковые солитоны могут распространяться только в устойчивом (по Джинсу) диске.

Вопрос о возможности существования стационарных решений в виде движущихся солитонов в плоскости гравитирующего диска чрезвычайно интересен как сам по себе, так и имеющий прямое отношение к проблеме спиральной структуры галактик.

Рассмотрим случай слабой гравитационной неустойчивости бесконечно тонкого вращающегося диска, характеризующийся следующими тремя признаками: а) максимальный инкремент неустойчивости γ_{max} мал по сравнению с частотой вращения $\Omega_o(r)$, $\gamma_{max} << \Omega_o(r)$ (рис. 1); б) размер области неустойчивости в k-пространстве волновых чисел Δk мал по сравнению с волновым числом k_o таким, что $\gamma_{k_o} = \gamma_{max}$, т.е. $\Delta k/k_o << 1$ (рис. 1); в) размер области неустойчивости в координатном пространстве Δr велик по сравнению с длиной волны $\lambda_o = 2\pi/k_o$, $k_o\Delta r >> 1$.

Указанные выше три условия позволяют существенно упростить формальную сторону решения задачи, воспользовавшись стандартными методами теории возмущений.

Дисперсионное уравнение для малых колебаний гравитирующего диска было получено Тоомре [1]; мы его запишем с учетом азимутальных возмущений:

$$\omega'^2 = \omega_k^2, \tag{1}$$

где

$$\omega'^2 = (\omega - m\Omega_0)^2, \quad \omega_k^2 = 2\Omega_0\kappa_0 + k^2c_s^2 - 2\pi G\sigma^0|k|. \qquad (2)$$

Здесь G – гравитационная постоянная; ω – частота колебаний; $\kappa_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi^0)$, v_ϕ^0 – азимутальная скорость вращения диска; $k^2 = k_r^2 + k_\phi^2$, здесь, однако, считается, что $k_\phi^2 << k_r^2$, k – модуль волнового вектора, $k_\phi = m/r$; $c_s^2 = \kappa p_0 \backslash \sigma_0$, p_0 – давление в плоскости диска, σ_0 – поверхностная плотность диска, $\kappa = 3 - 2/\gamma$, где γ – показатель адиабаты: $P/P_0 \sim (\rho/\rho_0)^\gamma$, где P – обычное давление, ρ – объемная плотность, $\rho = \sigma\delta(z)$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака. Индекс "нуль" отмечает стационарные величины. Условие а) выполняется, если максимальный инкремент неустойчивости γ_{max} удовлетворяет неравенству

$$\gamma_{max} = \sqrt{\pi^2G^2\sigma_0^2/c_s^2 - 2\kappa_0\Omega_0} << \Omega_0. \qquad (3)$$

Наибольший рост "основной" гармоники k_0 приведет к тому, что нелинейные эффекты начнут приводить к образованию обертонов с волновыми числами $2k_0$, $3k_0$ и т.д. Если представить все характеризующие диск функции в виде суммы медленно и быстро меняющихся слагаемых, то быстро меняющуюся часть можно разложить в ряд Фурье по основной гармонике k_0:

$$X = X^0 + \tilde{X} = X^0 + \sum_n X_n e^{ink_0r}, \qquad (4)$$

где $X = (v_r, v_\phi, \Psi, \sigma)$, $v_r^0 = 0$, v_r – радиальная гидродинамическая скорость, Ψ – гравитационный потенциал в плоскости диска. Исходим из системы гидродинамических уравнений, обычно используемой при анализе возмущений, локализованных в плоскости гравитирующего диска $(v_z = 0)$ [2].

Подставляя неизвестные функции в виде (4) в эту систему уравнений и воспользовавшись указанными выше тремя условиями, выражаем все неизвестные функции через функцию возмущенной азимутальной скорости v_1 (необходимые выкладки можно найти в [4]). Для основной гармоники этой функции получаем следующее нелинейное дифференциальное уравнение

$$\hat{L}^2 v_1(t,\phi) = \gamma_{k_0}^2 v_1(t,\phi) + \frac{(2-\kappa)k_0^2\Omega_0}{\kappa_0}\left[\frac{8(2-\kappa)\Omega_0\kappa_0}{\omega_{2k_0}^2} - (3-\kappa)\right] \times$$

$$\times |v_1(t,\phi)|^2 v_1(t,\phi), \qquad (5)$$

где

$$\omega_{2k_0} = m\Omega_0 + \sqrt{2\Omega_0\kappa_0}, \quad \kappa_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi^0), \quad \kappa_0 > 0, \quad \hat{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0\frac{\partial}{\partial\phi}. \qquad (6)$$

Покажем, что в области

$$2-\frac{\omega_{2k_o}^2}{8\Omega_o\kappa_o-\omega_{2k_o}^2}<\kappa<2 \qquad (7)$$

уравнение (5) имеет стационарное решение солитонного типа.

Из (5) видно, что рост амплитуды возмущенной скорости, вызванный неустойчивостью, задерживается на уровне

$$|v_1|^2=\frac{(\gamma_{k_o}^2+m^2\Omega_o^2)\kappa_o}{(2-\kappa)k_o^2\Omega_o}\left[(3-\kappa)-\frac{8(2-\kappa)\Omega_o\kappa_o}{\omega_{2k_o}^2}\right]^{-1},$$

а амплитуда возмущенной плотности возрастает до величины

$$\frac{|\sigma_1|^2}{\sigma_o^2}=\frac{k_r^2}{k_o^2}\frac{(\gamma_{k_o}^2+m^2\Omega_o^2)}{(2-\kappa)\Omega_o\kappa_o}\left[(3-\kappa)-\frac{8(2-\kappa)\Omega_o\kappa_o}{\omega_{2k_o}^2}\right]^{-1}.$$

Пусть в окрестности точки $\mathbf{k}_o$ возбужден узкий пакет волн, $\Delta k/k_o \ll 1$. Учесть разброс волновых чисел несложно, если представить функцию $\gamma^2(\mathbf{k})$ в виде ряда в окрестности точки $\mathbf{k}_o$, где эта функция имеет максимум

$$\gamma_{\mathbf{k}}^2=\gamma_{\mathbf{k}_o}^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{\mathbf{k}}^2}{\partial k^2}\bigg|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_o}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_o)^2+\ldots \qquad (8)$$

Как следует из формулы (1)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_k^2}{\partial k^2}\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{Im}\,\omega'^2}{\partial k^2}=-c_s^2,$$

$\mathbf{k}-\mathbf{k}_o=k_r-k_{or}\equiv k_{1r}$, так как $k_r \gg k_\phi = m/r$. Отсюда вместо (8) имеем

$$\gamma_k^2=\gamma_{k_o}^2-k_{1r}^2c_s^2. \qquad (9)$$

Заменяя в уравнении (5) $\gamma_{k_o}^2$ на γ_k^2 и воспользовавшись разложением (9), перейдем в уравнении (5) к координатному представлению. Для этого умножим почленно (5) на e^{ik_1r} и проинтегрируем по dk_1, полагая, что

$$\int v_1(k,t)\,e^{ik_1r}\,dk_1=v_1(r,t).$$

В результате получим уравнение

$$v_1(\mathbf{r},t)=(\gamma_{k_o}^2+c_s^2\Delta_r)\,v_1(\mathbf{r},t)+\frac{(2-\kappa)\,k_o^2\Omega_o}{\kappa_o}\left[\frac{8(2-\kappa)\Omega_o\kappa_o}{\omega_{2k_o}^2}-(3-\kappa)\right]\times$$

$$\times|v_1(r,t)|^2v_1(\mathbf{r}\ t), \qquad (10)$$

где

$$\Delta_r \equiv \partial^2/\partial r^2.$$

Выбрав координатно-временную зависимость $v_1(\mathbf{r}, t)$ в виде $v_1(\mathbf{r}, t) = V(\xi) \equiv V(k_r r + m\phi - \omega t)$, перейдем в уравнении (10) к переменной ξ:

$$a^2 \frac{d^2 V}{d\xi^2} = \gamma_0^2 V - \beta^2 V^3,$$

где

$$a^2 = (\omega - m\Omega_0)^2 - k_r^2 c_s^2, \quad \beta^2 = \frac{(2-\kappa) k_0^2 \Omega_0}{\kappa_0} \left[(3-\kappa) - \frac{8(2-\kappa)\Omega_0 \kappa_0}{\omega_{2k_0}^2} \right]$$

Решение уравнения (11) есть (12)

$$V(\xi) = \frac{a}{b} \frac{1}{\operatorname{ch} a\xi}, \tag{13}$$

$$a = \gamma_0^2/a^2, \quad 2b^2 = \beta^2/a^2. \tag{14}$$

Итак, как мы видим из формул (11) – (14), во вращающемся гравитирующем газовом диске возможно существование двух типов солитонов.

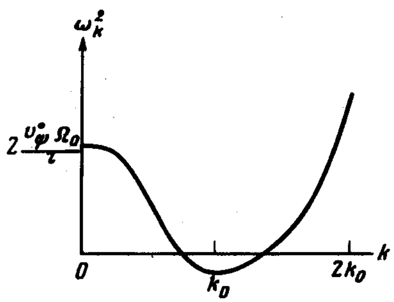

Рис. 1. Случай Джинсовской неустойчивости, $\gamma_{max} = \gamma_{k_0}$

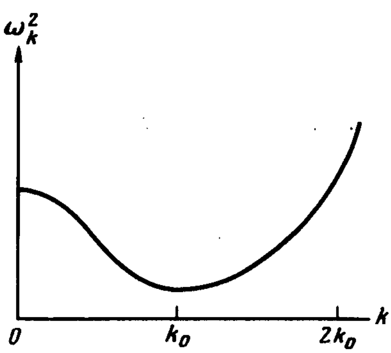

Рис. 2. Случай устойчивого (по Джинсу) диска, $\gamma = 0$

1) Сверхзвуковой солитон, $a^2 > 0$, который может возникнуть и распространяться в слабо неустойчивом диске, $\gamma_k^2 > 0$ (рис. 1). При этом уравнение состояния диска должно удовлетворять условию $\beta^2 > 0$. Поскольку $\kappa > 0$ (см. формулу (6)), то условие $\beta^2 > 0$ соответствует: в случае произвольной функции $\kappa_0^2 > 0$ и моды $m = 0$ показателю адиабаты γ, лежащему в области $3/2 < \gamma < 2$; для твердотельно вращающегося дис-

ка: а) для моды $m = 1$ $5/4 < \gamma < 2$, б) для моды $m \geqslant 2$ – всем разумным значениям γ.

2) Дозвуковой солитон, $a^2 < 0$, который может распространяться в устойчивом (по Джинсу) диске, $\gamma_k^2 < 0$ (рис. 2). При этом уравнение состояния диска должно удовлетворять условию $\beta^2 < 0$, что соответствует в случае произвольной функции $\kappa_0^2 > 0$ и моды $m = 0$ показателю адиабаты $\gamma < 3/2$, а для твердотельно вращающегося диска и моды $m = 1$ $\gamma < 5/4$.

Институт земного магнетизма
ионосферы и распространения радиоволн
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
4 марта 1977 г.

После переработки
7 июня 1977 г.

Литература

[1] A.Toomre. Astrophys. J., 139, 1217, 1964.

[2] В.Л.Поляченко, А.М.Фридман. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М., изд. Наука, 1976.

[3] C.Hunter. Ann. Rev. Fluid Mech., 4, 219, 1972.