Письма в ЖЭТФ, том 26, вып. 3, стр. 180 – 182 *5 августа 1977 г.*

О ШИРИНЕ СПЕКТРА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К ГАРМОНИЧЕСКИМ

Ю.Л.Климонтович

Вопрос о распределении (из-за естественных флуктуаций) средней энергии физических, химических, биологических автоколебательных систем имеет принципиальное значение. Ширина линии, в частности, определяет предельную чувствительность многих приборов.

Расчету спектра автоколебательных систем посвящена значительная литература (см., например, [1 – 3]). Из-за нелинейности исходных уравнений Ланжевена эта задача решается приближенно. При расчете можно ввести два временных параметра τ_A, $\tau_\phi = 1/D_\phi$. Первый (τ_A) определяет время релаксации амплитуды A, а второй (τ_ϕ) – фазы. D_ϕ – коэффициент диффузии фазы. В режиме развитой генерации $\tau_\phi >> \tau_A$, поэтому можно ввести малый параметр $\epsilon = \tau_A/\tau_\phi$.

В нулевом приближении по ϵ (без учета флуктуаций амплитуды) спектр-линия Лоренца с полушириной $\Delta\omega = D_\phi$ и, следовательно, ширина линии полностью определяется диффузией фазы D_ϕ. В первом приближении по ϵ спектр состоит из суммы двух линий Лоренца узкой и широкой (пьедестала). Полуширина узкой линии теперь $D_\phi(1 + \frac{3}{4}\epsilon) \gtrsim D_\phi$, а широкой $4D_\phi/\epsilon >> D_\phi$.

При учете высших приближений по $\epsilon = \tau_A/\tau_\phi$ возможен эффект накопления вкладов амплитудных флуктуаций и возникает задача определения разультирующей ширины спектральной линии.

В настоящей работе показано, что эффект накопления вкладов флуктуаций амплитуды приводит к тому, что ширина результирующей линии Лоренца в режиме развитой генерации оказывается равной $2D_\phi$, а не D_ϕ и, следовательно, диффузия фазы не определяет полностью ширину линии. Это меняет представления о причинах, определяющих ширину линии спектра автоколебательных систем.

Вместо уравнений Ланжевена для амплитуды и фазы [1 – 3] будем исходить из уравнений для двухвременной корреляции

$$<E(\tau)> = \frac{1}{2} < A(t) A(t-\tau) \cos[\phi(t) - \phi(t-\tau)]> \quad (1)$$

и средней энергии $<E>$. При $\tau = 0$ функция (1) равна $<E>$, поэтому функция E_ω – распределение средней энергии по спектру. $<E> = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega d_\omega$.

Из уравнения Фоккера –Планка для двухвременной функции распределения при кубической нелинейности находим уравнения для функции (1)

$$\frac{d}{d\tau} <E(\tau)> + \frac{1}{2} <(\gamma + \eta E) E(\tau)> = 0.$$

Нам понадобятся также уравнения для средних значений энергии E и амплитуды A. Они также следуют из уравнения Фоккера – Планка и в стационарном состоянии имеют вид

$$<(\gamma + \eta E) E> = D, \qquad <(\gamma + \eta A^2/2) A> = D <^1/A> \quad (3)$$

D – интенсивность случайного источника в уравнениях Ланжевена. При действии теплового шума $D = \gamma kT$.

Уравнения (2), (3) незамкнуты, так как из-за нелинейности исходных уравнений Ланжевена в них, наряду с первыми, входят высшие моменты. Для линейного гармонического осциллятора, когда $\eta = 0$, $\gamma > 0$ из (2), (3) следует, что полуширина линии $\Delta\omega = \gamma/2$ и средняя энергия $<E> = D/\gamma = kT$.

Для автоколебательной системы для расчета спектра надо при рассматриваемом подходе решать приближенно систему нелинейных уравнений для моментов. Здесь мы найдем искомую ширину линии основываясь на следующих рассуждениях.

Представим функцию (1) в виде

$$<E(\tau)> = \sum_i <E>_i e^{-\lambda_i \tau} = \sum_i <E>_i e^{-\lambda\tau} = <E> e^{-\lambda\tau}. \quad (4)$$

Это возможно, если спектр представляется суммой линий Лоренца с полушириной $(\Delta\omega)_i = \lambda_i$. Из (2), (4) получаем уравнение для λ

$$\lambda = \frac{1}{2<E>} <(\gamma + \eta E) E(\tau)> e^{\lambda\tau}. \quad (5)$$

Правая часть этого уравнения не зависит от τ, если

$$<(\gamma + \eta E) E(\tau)> = B e^{-\lambda\tau}. \quad (6)$$

Константа B подлежит определению. Найдем ее в двух предельных случаях. Первый соответствует нулевому приближению по ϵ, т.е. полному пренебрежению амплитудными флуктуациями. При этом в (5) под знаком $<\ >$ можно произвести замену $A(t-\tau) \to <A>$, т.е. пренебречь корреляцией множителя $A(t-\tau)$ с остальными множителями.

При этом в (4) следует оставить лишь один член с наименьшим λ_i, а в (6) за начальный выбрать момент после затухания быстрых флуктуаций. Из (6), (3) в этом приближении следует

$$B = \langle(\gamma + \eta A^2/2)A\rangle \frac{\langle A\rangle}{2} = \frac{1}{2} D \langle \frac{1}{A} \rangle \langle A \rangle = \frac{1}{2} D. \qquad (7)$$

Здесь использовано второе уравнение (3) и условие развитой генерации ($\delta A << \langle A\rangle$). Из (5) – (7) находим

$$(\lambda)_0 \equiv (\Delta\omega)_0 = \frac{D}{4\langle E\rangle_0} = \frac{D}{2\langle A\rangle_0^2} \equiv D_\phi \langle E\rangle_0 = \frac{|\gamma|}{\eta} \quad . \qquad (8)$$

В другом предельном случае мы учитываем в (4) все члены ряда, что соответствует учету в (5), (6) полной корреляции множителя $A(t-\tau)$ с остальными. Тогда в (6) константа B равна левой части в (6) при $t = 0$, т.е.

$$B = \langle(\gamma + \eta E)E\rangle = D, \quad \lambda \equiv \Delta\omega = \frac{D}{2\langle E\rangle_0} = 2(\Delta\omega)_0 \, . \qquad (9)$$

Здесь использовано первое уравнение (3).

Заметим, что можно записать формулы для $(\Delta\omega)_0$, $\Delta\omega$, справедливые при любых превышениях над порогом

$$(\Delta\omega)_0 = \frac{D}{2\langle A\rangle} \langle \frac{1}{A} \rangle, \qquad \Delta\omega = \frac{D}{2\langle E\rangle}. \qquad (10)$$

Отсюда в режиме развитой генерации $\Delta\omega = 2(\Delta\omega)_0$, а в равновесном состоянии ($\eta = 0$, $\gamma > 0$) $(\Delta\omega)_0 = \Delta\omega$, так как при этом $\langle A\rangle \langle A^{-1}\rangle = \langle E\rangle$. Таким образом, при приближении к равновесию обе кривые сливаются.

Московский
государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
4 марта 1977 г.

После переработки
4 июля 1977 г.

Литература

[1] Р.Л.Стратонович. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., изд. Советское радио, 1961.

[2] С.М.Рытов. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. М., изд. Наука, 1976.

[3] А.Н.Малахов. Флуктуации в автоколебательных системах. М., изд. Наука, 1968.