

О СУММИРОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В.С.Попов, В.Л.Елецкий, А.В.Турбинер

Рассмотрен метод суммирования рядов теории возмущений с факториально растущими коэффициентами a_k . Установлена связь между асимптотикой a_k при $k \rightarrow \infty$ и характером особенности суммы ряда. Найдены границы области применимости улучшенной теории возмущений. Полученные результаты проверены на ряде физических задач, для которых известны точные решения.

В последние годы в квантовой механике найдены [1, 2] эффективные способы вычисления высоких порядков теории возмущений (особенно детально исследован случай ангармонического осциллятора [2]). Липатов [3, 4] развил квазиклассический метод вычисления функционального интеграла в квантовой теории поля и нашел асимптотику коэффициентов ряда теории возмущений (ТВ) для функции Гелл-Манна – Лоу (ГЛФ) в скалярной теории с взаимодействием $H_{int} = g f \phi^n d^D x / n!$, $D = 2n / (n - 2)$. Это направление интенсивно развивается (см., например, [5 – 9]). Целью настоящей статьи является выяснение вопроса, какую информацию о поведении точных решений можно извлечь из асимптотики коэффициентов a_k .

Пусть $f(z)$ – функция, изображаемая асимптотическим (при $z \rightarrow 0$) рядом:

$$f(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (-z)^k. \quad (1)$$

В большинстве рассмотренных теорий [2 – 6] коэффициенты имеют вид

$$a_k = (ka)! a^k k^\beta \left(c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \dots \right), \quad (2)$$

где $a, \alpha > 0, z! \equiv \Gamma(z + 1)$. Более удобно другое представление асимптотики a_k при $k \rightarrow \infty$:

$$a_k = \frac{(ka)!}{k!} a^k \sum_{m=0}^{\infty} C_m (k + \beta - m)! \quad (3)$$

Коэффициенты этих двух рядов связаны линейным преобразованием:

$$c_i = \sum_{j=0}^i S_{ij} C_j. \text{ Для элементов матриц } S \text{ и } S^{-1} \text{ нами получены явные формулы при произвольных } i, j, \text{ что позволяет переходить от представления (3) к (2), и наоборот. Подставляя (3) в (1) и используя метод Бореля, находим сумму ряда (1):}$$

формулы при произвольных i, j , что позволяет переходить от представления (3) к (2), и наоборот. Подставляя (3) в (1) и используя метод Бореля, находим сумму ряда (1):

$$f(z) = (az)^{-(\beta+1)} e^{1/az} \sum_{m=0}^{\infty} (\beta - m)! C_m (az)^m J(az; \alpha, m - \beta), \quad (4)$$

где $J(x; \alpha, \beta) \equiv x^{-\beta} \int_1^{\infty} e^{-t/x} [(t-1)^{\alpha} + 1]^{\beta-1} dt$. В часто встречающемся

случае $\alpha = 1$ интеграл сводится к неполной гамма-функции: $J(x; 1, \beta) = \Gamma(\beta, x^{-1})$. Тот же результат дает суммирование ряда (1) с коэффициентами (3) методом Зоммерфельда – Ватсона, предложенным в [2]. Возможность получения ответа в замкнутом виде, удобном для численных расчетов, является преимуществом (3) по сравнению с параметризацией (2).

Точка $z = 0$ является точкой ветвления для $f(z)$. Следуя [10], можно показать, что асимптотика a_k определяет характер особенности суммы ряда (1), а именно поведение скачка функции $f(z)$ на разрезе $z < 0$ при $z \rightarrow -0$:

$$\Delta f(z) = \pi C_0 a^{-(\beta+1)} (-az)^{-(\beta+1)/\alpha} \exp\{-(-az)^{-1/\alpha}\}. \quad (5)$$

В задачах теории поля до сих пор удалось вычислить лишь первый член разложения (2); обозначим его через \tilde{a}_k . Несколько точных коэффициентов a_k ряда ТВ можно найти из вычисления графиков Фейнмана. Это позволяет построить улучшенную ТВ:

$$f_N(z) = \tilde{f}(z) + \sum_{k=k_0}^{k_0 + N - 1} (a_k - \tilde{a}_k) (-z)^k, \quad (6)$$

где $\tilde{f}(z)$ – борелевская сумма ряда $\sum \tilde{a}_k (-z)^k$. Для функции $f_N(z)$ N первых коэффициентов совпадают с точными, а также учтен далекий "хвост" ряда ТВ. Естественно ожидать, что с ростом N улучшенная ТВ будет приближаться к точному решению. Исследование показало, что это действительно так, но только в области $0 < z < z_N$:

$$z_N = \frac{1}{a} \left(\frac{e}{N\alpha} \right)^{\alpha}; \quad N \gg 1, \quad e = 2,718... \quad (7)$$

При $z > z_N$ функции $f_N(z)$ круто отходят от точного решения. Эти результаты были проверены на ряде физических задач, для которых ряды ТВ имеют вид (2) и можно получить точные решения: 1) лагранжиан Гейзенберга – Эйлера в случае постоянных и однородных полей E и H ;

2) энергия уровней электрона при $z > 137$ (см. [11]); 3) релятивистское уравнение Томаса – Ферми для вакуумной экранировки [12];

\bar{a}_K/a_K

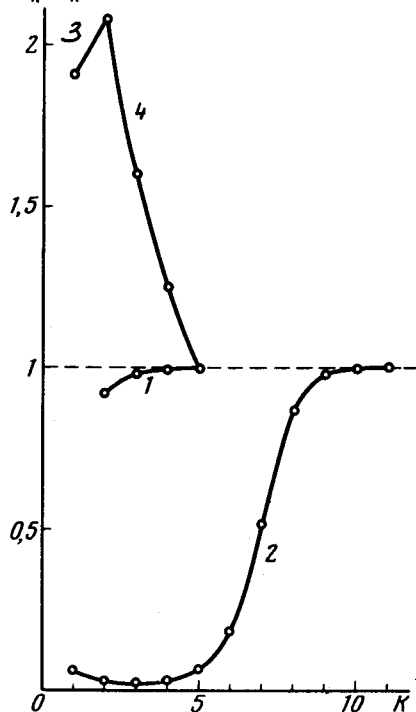


Рис. 1.

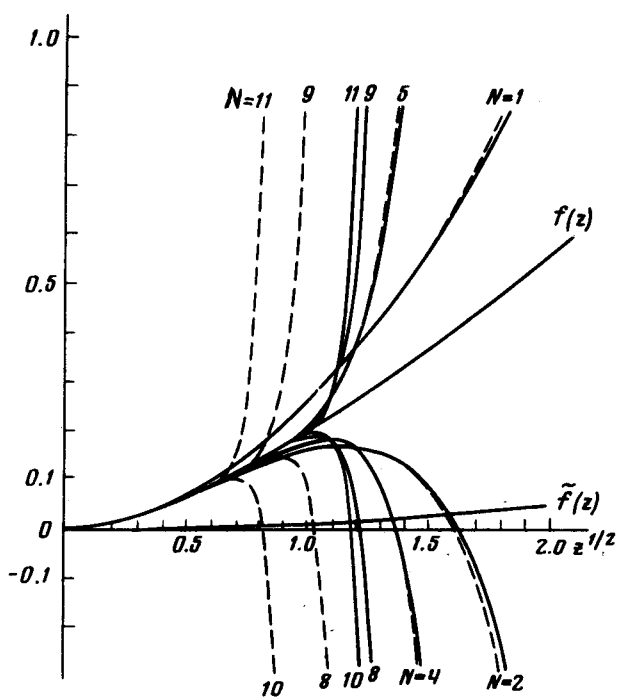


Рис. 2

4) штарк-эффект в сильном электрическом поле. За недостатком места, приведем лишь часть результатов. Из рис. 1 видно, как устанавливается асимптотика (у кривых указаны номера задач). Соотношение

между улучшенной ТВ и точным решением проиллюстрируем на примере задачи 2). Энергия ϵ уровня $1s_{1/2}$ вблизи границы нижнего континуума определяется уравнением: $f(z) = (\zeta^2 - 1)^{-1/2} - (\zeta_{cr}^2 - 1)^{-1/2}$, где $\zeta = z_\alpha$, $z = \epsilon^{-2} - 1$, а $f(z)$ приведена в [11]. На рис. 2 изображена эта функция, а также полиномы ТВ (пунктирные кривые; цифры указывают степень полинома) и $f_N(z)$ (сплошные кривые). Переход от ТВ к улучшенной ТВ расширяет ее область применимости, что особенно заметно для больших N . Там, где соседние кривые улучшенной ТВ близки друг к другу, они хорошо аппроксимируют точную кривую. Это имеет место и для задач 1), 3), 4).

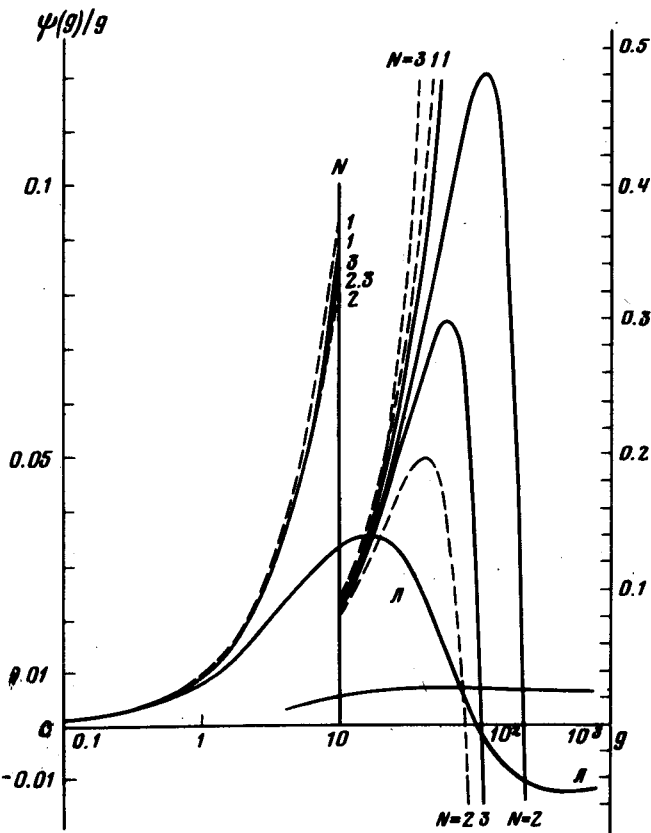


Рис. 3

Применим данный метод к скалярной теории $g\phi^4/4!$, для которой известны коэффициенты ГЛФ a_2, a_3, a_4 и асимптотика \tilde{a}_k [3, 4], что позволяет вычислить $\psi(g)$ и $\psi_N(g)$ при $N = 1, 2, 3$. Эти кривые (см. рис. 3) при $g \leq 40$ близки друг к другу¹⁾, откуда можно заключить, что и точная функция $\psi(g)$ близка к ним. С другой стороны, при $g = 10 \div 40$ функции $\psi_N(g)$ в 3 \div 10 раз отличаются от кривой Л, полученной в [3]. Это является указанием на плохую точность разложения по $1/n$, вследствие чего вывод [3] о существовании нуля ГЛФ представляется сомнительным (см. также [8]). Надежно установленным является лишь скачок ГЛФ на разрезе в окрестности нуля. Для ска-

¹⁾ При $g > 10$ масштаб для кривых 1 – 3 изменен в четыре раза и показан справа.

лярной теории типа $g\phi^n/n!$ имеем:

$$\Delta\psi(g) = A_1|g|^{-(n^2 + n - 2)/(n - 2)^2} \exp(-A_2|g|^{-2/(n - 2)}), \quad (8)$$

где $g \rightarrow -0$, A_1 и A_2 — константы, зависящие от n .

Ситуация с нулем ГЛФ может проясниться, если будут вычислены следующие коэффициенты ряда ТВ и найден метод, позволяющий восстановить функцию $\psi(g)$ в более широком интервале g , чем улучшенная ТВ (6). Возможным кандидатом является метод аппроксимаций Паде.

Авторы благодарны Б.Л.Иоффе за обсуждение работы и полезные замечания.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
15 июня 1977 г.

Литература

- [1] J.S.Langer. Ann. Phys., 41, 108, 1967.
- [2] С.М.Вендер, Т.Т.Ву. Phys. Rev. Lett., 27, 461, 1971; Phys. Rev., D7, 1620, 1973.
- [3] Л.Н.Липатов. Письма в ЖЭТФ, 24, 179, 1976; ЖЭТФ, 71, 2010, 1976.
- [4] Л.Н.Липатов. Письма в ЖЭТФ, 25, 116, 1977; ЖЭТФ, 72, 411, 1977.
- [5] E.Brézin, J.C.Le Guillou, J.Zinn-Justin. Phys. Rev., D15, 1544, 1977.
- [6] E.V.Vogomolny. Phys. Lett., 67B, 193, 1977.
- [7] G.Parisi. Phys. Lett., 66B, 382, 1977.
- [8] D.V.Shirkov. Lett. Nuovo. Cim., 18, 452, 1977.
- [9] A.V.Turbiner. Preprint ИТЕР-27, 1977.
- [10] В.С.Попов. ЖЭТФ, 47, 2229, 1964.
- [11] В.С.Попов. ЯФ, 12, 429, 1970; ЖЭТФ, 59, 965, 1970.
- [12] А.Б.Мигдал, В.С.Попов, Д.Н.Воскресенский. ЖЭТФ, 72, 834, 1977.