

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В 2D МОДЕЛИ ИЗИНГА С ПРИМЕСНЫМИ СВЯЗЯМИ

Вик. С. Доценко, Вл. С. Доценко

Задача о критическом поведении 2D модели Изинга с примесными связями решается методом фейнмановских блужданий по 2D решетке. Флуктуационная часть теплоемкости оказывается равной $C_{\text{фл}} \sim -\ln |\tau|$ при $\tau \rightarrow 0$, в отличие от чистой модели Изинга, для которой $C_{\text{фл}} \sim -\ln |\tau|$.

Фазовые переходы второго рода в неоднородных физических системах являются в настоящее время предметом интенсивного исследования. Сейчас уже ясно, что присутствие примесей не приводит, в общем случае, к исчезновению особенностей в термодинамических функциях [1]. Однако дефекты могут оказывать существенное влияние на характер особенностей, т. е. приводить к изменению критических индексов. В работе [1] это явление было продемонстрировано на примере модели ϕ^4 . Предпринимаются также попытки выяснить влияние примесей на характер фазового перехода для простейшей модели ферромагнетизма – модели Изинга (МИ). Здесь самостоятельный интерес представляет 2D модель, для которой, в отсутствие примесей, имеется точное аналитическое решение [2]. В настоящее время установлено несколько существенных фактов о линии фазового перехода (в плоскости T, ν – концентрация примесных связей), см., например [3]. В частности, для модели с оборванными связями (дефектная связь $\tilde{T} = 0$) известен угол наклона линии перехода при $\nu \rightarrow 0$ [4], а также критическая концентрация примесей ν_c , при которой фазовый переход исчезает, $T_c(\nu_c) = 0$ [5]. Однако само критическое поведение при $T \rightarrow T_c(\nu)$ исследовано не было.

В этой статье мы приводим результаты точного решения задачи о критическом поведении теплоемкости 2D МИ с малой концентрацией ($\nu \ll 1$) испорченных связей $\tilde{T} \neq J$. Оказывается, что критическое поведение модели при $\tau \equiv (T - T_c)/T_c \rightarrow 0$ изменяется универсальным образом. А именно, флуктуационная часть теплоемкости ведет себя

следующим образом:

$$C_{\text{фл}} \sim - \ln |\tau| \quad \text{при} \quad \tau \gg \tau_{\nu}, \quad (1)$$

$$C_{\text{фл}} \sim - \ln \ln |\tau| \quad \text{при} \quad \tau \ll \tau_{\nu}, \quad (2)$$

где $\tau_{\nu} \sim \exp\{-\text{const}/\nu\}$ — масштаб температуры при котором происходит смена критического поведения — переход от чистой МИ к неупорядоченной. Заметим здесь, что хотя в решении используется малость ν , однако универсальность критического поведения дает серьезные основания ожидать, что при $T \rightarrow T_c(\nu)$ флуктуационная часть теплоемкости неупорядоченной МИ дается формулой (2) при любой концентрации $\nu < \nu_c$.

Рассмотрим 2D МИ с примесными связями. Ее статистическая сумма имеет вид

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left\{ \sum_{x,\alpha} K_{x,\alpha} \sigma_x \sigma_{x+\hat{\alpha}} \right\}. \quad (3)$$

Здесь $K_{x,\alpha} \equiv J_{x,\alpha}/T$ имеет значение $\beta = J/T$ на большинстве связей, и испорченное $\beta = \tilde{J}/T$ — на примесных, распределенных по решетке случайным образом, с малой концентрацией ν . Вычисление статистической суммы (3) стандартным образом сводится к суммированию по конфигурациям из замкнутых контуров, а затем к фейнмановским блужданиям по решетке с фазой $\exp(i\Delta\phi/2)$ на каждый поворот пути блуждающей частицы [6]. После этих преобразований статистическая сумма (3) примет вид $Z = \exp\{-F\}$

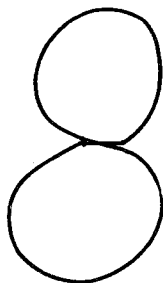
$$F = \sum_P \left(\prod_P \lambda_i \right) \Phi(P). \quad (4)$$

Здесь $\lambda_i \equiv \lambda_{x,\alpha} = \text{th} K_{x,\alpha}$ — скалярный вес одного шага по связи (x, α) $\prod_P \lambda_i$ — скалярный вес замкнутого пути P ; $\Phi(P) = \prod \exp(i\Delta\phi/2)$ — фазовый фактор амплитуды пути P . Затем мы должны усреднить свободную энергию (4) по случайным значениям множителей λ_i . В нашей модели усреднение для каждой связи решетки (но не пути) идет независимо: $\lambda_i = \lambda$ с вероятностью $1 - \nu$, и $\tilde{\lambda}$ с вероятностью ν . При этом существенно, что в сумму по путям для свободной энергии (4) дают вклад также и пути, в которых одна решеточная связь может быть пройдена несколько раз. Например, нет сокращения (за счет фазового фактора амплитуды) для пути на рисунке, так как сумма в (4) идет только по одиночным петлям. В результате, усреднение свободной энергии (4) приводит к "склежке" путей на повторяющихся связях, и мы уже не будем иметь графиков для свободных блужданий.

Идея решения задачи состоит в следующем. Известно, что в критической области обычная 2D МИ эквивалентна модели свободных фермионов. В лагранжевом подходе, который мы используем, это означает, что 4-х компонентные (на квадратной решетке) блуждающие объекты (см. [6]) в критической области превращаются в 2-х компонентные. Другими словами, из четырех степеней свободы только две являются

сильно флуктуирующими, и они описываются свободным спинорным полем (в эвклидовой формулировке) с массой $m \sim \tau$:

$$A_0[\psi] = \int d^2x (\bar{\psi} \hat{\partial} \psi + m \bar{\psi} \psi). \quad (5)$$



Если концентрация примесей мала, то вначале, при уменьшении τ , флуктуации будут развиваться как в чистой МИ. При дальнейшем уменьшении τ , и увеличении корреляционной длины $r_c \sim 1/\tau$, влияние примесей становится существенным. Как отмечалось, усреднение свободной энергии (4) приводит к "склеивке" путей блуждающей частицы. Из рассуждений приведенных выше следует, что в критической области ($\tau \rightarrow 0$) должно возникнуть эквивалентное описание неупорядоченной МИ спинорным полем, но со взаимодействием. Можно сразу угадать и вид взаимодействия, которое должно возникнуть. Действительно, случайность связей решетки в определенном смысле имитируется случайностью массы в (5). Гауссово усреднение по массам приводит к Лагранжиану

$$A[\psi] = \int d^2x [\bar{\psi}^a \hat{\partial} \psi^a + m_0 \bar{\psi}^a \psi^a - g_0 (\bar{\psi}^a \psi^a)^2]. \quad (6)$$

Здесь $m_0 = \langle m \rangle$. Отметим сразу, что это только наводящие соображения. На самом деле, в точные численные значения параметров m_0 и g_0 (см. ниже) в (6) дают равный вклад все четыре степени свободы решеточного блуждающего объекта, а не только сильно флуктуирующие, описываемые Лагранжианом (5). Спинорное поле ψ^a является N -компонентной (гроссмановой) переменной, а в результатах полагается $N = 0$. Здесь используется известный трюк де Жена, применяемый в теории полимеров для суммирования по одиночным путям [7]. В нашей модели мы сводим сумму по одиночным путям для свободной энергии к нуль-компонентной Лагранжевой теории.

Точное решение задачи в критической области состоит в следующем. Усредняется свободная энергия (4). При этом возникает сумма по путям в которой повторяющиеся связи входят с дополнительным весом. Для этой суммы мы должны выполнить переход к непрерывному пределу и затем сравнить получившиеся графики с диаграммами Лагранжевой модели (6) при $N = 0$. Переход к непрерывному пределу мы опишем в следующей, более подробной статье. Результат же состоит в том, что в критической области неупорядоченная МИ эквивалентна Лагранжевой модели (6) (при формальном значении $N = 0$), с парамет-

рами:

$$m_0 = 2 \frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_c^0} \approx c_1 \tau, \quad g_0 = \nu \frac{a^2(1 + 2b(1 + ab))}{(1 + ab)^2} = c_2 \nu. \quad (7)$$

Здесь $\lambda = \text{th } \beta$; $\lambda_c^0 = \sqrt{2} - 1$; $a = (\text{th } \tilde{\beta} - \lambda_c^0) / \lambda_c^0$; $b = \sqrt{2} \lambda_c^0 / 4$; c_1, c_2 числа ~ 1 ;

$$\lambda_c \equiv \text{th } \beta_c = \lambda_c^0 - \nu \frac{\lambda_c^0 a}{1 + ab} \quad (8)$$

(все вычисления с точностью до первой степени концентрации примесей ν). Лагранжиан (6) с постоянными (7) описывает критическое поведение модели с высокотемпературной стороны ($\tau > 0$). Для низкотемпературной фазы необходимо лишь сделать замены: $\lambda \rightarrow \lambda^* = \exp(-2\beta)$, $a \rightarrow a^* = (\exp(-2\tilde{\beta}) - \lambda_c^0) / \lambda_c^0$

$$\lambda_c \rightarrow \lambda_c^* \equiv \exp(-2\beta_c) = \lambda_c^0 - \nu \frac{\lambda_c^0 a^*}{1 + a^* b}. \quad (8^*)$$

Отметим, что в частном случае модели с оборванными связями ($\tilde{\beta} = 0$) формула (8) дает известное численное значение [3, 4]

$$\frac{d \text{th } \beta_c}{d\nu} = \frac{\lambda_c^0}{1 - b} = 6\sqrt{2} - 8.$$

Дальнейшее решение не представляет труда. Модель (6) — модель Гросса — Невью [8] — является ренормируемой. Уравнения ренормировки заряда и массы имеют вид

$$\frac{dg}{d\xi} = -2 \frac{1 - N}{\pi} g^2, \quad \frac{d \ln m}{d\xi} = -\frac{1 - 2N}{\pi} g. \quad (9)$$

Здесь $\xi = \ln 1/\rho$. Ренормгрупповые методы, см., например в [9, 10]. При $N = 0$ получаем

$$g(\xi) = \frac{g_0}{1 + \frac{2g_0}{\pi} \xi}, \quad m(\xi) = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{2g_0}{\pi} \xi}}. \quad (10)$$

Для теплоемкости обычным образом получаем (ср. [10])

$$C_{\text{фл}} \approx -\frac{c_1^2}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(\frac{m(p)}{m_0} \right)^2 \text{Tr} G^2(p) \approx \frac{c_1^2}{4c_2 \nu} \ln \left(1 + \frac{2c_2 \nu}{\pi} \ln \frac{1}{c_1 \tau} \right). \quad (11)$$

Здесь $G(p) = (m_0 + i\hat{p}) / (m_0^2 + p^2)$ — спинорная функция Грина.

Мы благодарны С. П.Обухову, М. Е.Фейгельману, а также А.И.Ларкину и Д.Е. Хмельницкому за полезные обсуждения.

Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 ноября 1980 г.

Литература

- [1] Д.Е.Хмельницкий. ЖЭТФ, 68, 1960, 1975.
 - [2] L.Onsager. Phys. Rev., 65, 117, 1944.
 - [3] C.Tsallis, V.S.F.Levy. J. Phys. C: Solid St. Phys., 13, 465, 1980.
 - [4] A.Brecks Harris. J. Phys. C.: Solid St. Phys., 7, 1671, 1974.
 - [5] M.F.Sykes, J.W.Essam. Phys. Rev. Lett., 10, 3, 1963.
 - [6] S.Sherman. J. Math. Phys., 1, 202, 1960; Н.В.Вдовиченко. ЖЭТФ, 47, 715, 1964.
 - [7] P.G.De Gennes. Phys. Lett., 38A, 339, 1972.
 - [8] D.J.Gross. A.Neveu. Phys. Rev., D10, 3235, 1974.
 - [9] А. З. Паташинский, В. Л.Покровский. УФН, 121, 55, 1977.
 - [10] А. И. Ларкин, Д.Е. Хмельницкий. ЖЭТФ, 56, 2087, 1969.
-