

ДВУМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский, Г. М. Эмашберг

В пределе сильного поля (магнитная длина меньше эффективного боровского радиуса) для двумерного случая найдены волновые функции и спектры комплексов из двух и более электронов. Рассчитаны также электронные комплексы, локализованные на заряженной примеси. Для плотноупакованной системы электронов (заняты все состояния нижнего уровня Ландау) найдены спектры возбуждений экситонного и спин-волнового типов.

Мы приводим здесь несколько квантовомеханических результатов, относящихся к поведению двумерной системы электронов в сильном магнитном поле. Такая система активно исследуется в последнее время, в основном, в связи с проблемой двумерного вигнеровского кристалла [1].

1. Запишем оператор энергии системы электронов в калибровке

$$A_x = -\frac{1}{2} H_y, \quad A_y = \frac{1}{2} H_x: \quad \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m^*} \sum_i \left\{ \hat{p}_i^2 + \frac{\hbar}{l^2} (p_{ix}y_i - p_{iy}x_i) + \frac{\hbar^2}{4l^2} r_i^2 \right\} + \mu^* H \sum_i \sigma_{iz} \quad (1)$$

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k), \quad l^{-2} = eH/\hbar c$$

μ^* — эффективный магнетон, который в случае полупроводника может существенно превышать магнетон Бора. Вид взаимодействия мы пока не конкретизируем, предполагая лишь, что оно изотропно, т. е. зависит от r^2 . Магнитное поле будем считать настолько сильным, чтобы можно было пренебречь матричными элементами потенциала, переводящими электроны с одного уровня Ландау на другой. Если $V(r) = e^2/\epsilon r$ (ϵ — диэлектрическая постоянная), то это требование означает, что $l \ll \hbar^2 \epsilon / m^* e^2$. Остающийся оператор сохраняет числа частиц на каждом уровне, и мы будем стремиться диагонализировать его точно. Очевидно, что \hat{H}_0 не меняет вида при любом ортогональном преобразовании переменных \mathbf{r}_i , сохраняющем формы типа $\sum_i r_i^2$ и $\sum_i p_{ix}y_i$. Поэтому для системы одинаковых частиц (в отличие от случая частиц с разными зарядами) можно отделить движение центра масс, переходя, например, к переменным

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i}{\sqrt{N}}, \quad \vec{\rho}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{\rho}_2 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3}{\sqrt{6}}, \dots$$

$$\vec{\rho}_{N-1} = \frac{r_1 + r_2 + \dots + (N-1)r_N}{\sqrt{N(N-1)}} \quad (2)$$

Так как взаимодействие зависит только от разностей координат, то волновая функция системы может быть записана в виде $\Psi = \Psi_n^{(m)}(\mathbf{R}) \Psi(\vec{\rho}_i)$, где

$$\Psi_n^{(m)}(\mathbf{r}) = Br^{|m|} e^{im\phi} L_n^{(m)}\left(\frac{r^2}{2l^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4l^2}\right) \quad (3)$$

— решение двумерного уравнения Шредингера для частицы в магнитном поле в принятой калибровке, которому соответствует энергия $\epsilon_n^{(m)} = \frac{e\hbar H}{m^*c} \left(n + \frac{|m| - m + 1}{2}\right)$, $L_n^{(m)}$ — полином Лагерра.

2. Рассмотрим систему двух электронов. В отсутствие взаимодействия $\Psi = \Psi_n^{(m)}(\mathbf{R}) \Psi_{n_1}^{(m_1)}(\vec{\rho}_1)$. В силу изотропии \hat{V} диагонально по m_1 , а недиагональными по n_1 элементами мы пренебрегаем. Поэтому, вычисляя диагональные элементы, мы получим двухчастичный спектр. Для нижнего уровня Ландау ($n = n_1 = 0$)

$$E_{m_1} = \left(\frac{e\hbar}{m^*c} - 2\mu^*\right)H + \epsilon_{m_1}, \quad \epsilon_{m_1} = \frac{1}{2^{m_1} m_1!} \int_0^\infty x^{2m_1+1} e^{-x^2/2} V(\sqrt{2}xl) dx \quad (4)$$

Если $V = e^2/\epsilon r$, то $\epsilon_{m_1} = \frac{e^2 \Gamma(m_1 + 1/2)}{2 \epsilon l m_1!}$. При $m_1 \gg 1$ $\epsilon_{m_1} \sim m_1^{-1/2}$.

Несмотря на отталкивание спектр является дискретным, сгущающимся к нижнему уровню.

3. В случае трех частиц мы ограничимся задачей о спектре вблизи основного уровня Ландау. Из предыдущего примера ясно, что волновая функция относительного движения является произведением

$$\exp\left(\frac{-\rho_1^2 + \rho_2^2}{4l^2}\right)$$
 на полином относительно комплексных переменных

$z_k = r_k e^{i\phi^k}$ ($k = 1, 2, 3$), который должен зависеть только от $z_i - z_k$ и быть полностью антисимметричным. Имеется по одному такому полиному третьего, пятого и седьмого порядков:

$$P_3 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3), \quad P_5 = P_3 S, \quad P_7 = P_3 S^2, \quad S = \sum_{i,k} (z_i - z_k)^2, \quad (5)$$

которые и определяют волновые функции трех верхних состояний, энергии которых оказываются равными, соответственно (в единицах $e^2/\epsilon l$):

$$E_3 = 1,22; \quad E_5 = 1,05; \quad E_7 = 0,94.$$

Начиная с девятого порядка существует более одного полинома требуемой симметрии. Для определения спектра здесь нужно решать секулярную задачу, а волновые функции, в отличие от (5), становятся зависящими от вида $V(r)$. Мы ограничимся тем, что приведем полный ортогональный базис антисимметричных полиномов степени однородности $2m + 1$:

$$P_{2m+1}^{(k)} = v_1^{m_1} v_2^{m_2} + v_1^{m_2} v_2^{m_1}, \quad v_{1,2} = z_1 - z_2 \pm \frac{i}{\sqrt{3}} (z_1 + z_2 - 2z_3) \quad (6)$$

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} (2m + 1 \pm 3k)$$

k — нечетное число и $3k \leq 2m + 1$.

Волновая функция наиболее плотного и наивысшего состояния N частиц определяется полиномом $\prod_{i < k} (z_i - z_k)$, который совпадает с

определителем Вандермонда порядка N . При $N \rightarrow \infty$ плотность частиц в этом состоянии стремится к $(2\pi l^2)^{-1}$, и оно поэтому в пределе больших N соответствует полностью занятому уровню Ландау.

4. Такой же подход позволяет решить задачу об электронных комплексах вблизи положительно заряженной примеси с потенциалом $V(r) = -e^2/\epsilon r$. Одноэлектронная задача уже была рассмотрена [3]. Правильной функцией в этом случае является $\Psi_n^{(m)}(r)$. Простейшие двухэлектронные функции являются произведением $\exp\left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{4l^2}\right)$ на полиномы $z_1 - z_2$ и $z_1^2 - z_2^2$. Энергии этих состояний, отсчитанные от нулевого уровня Ландау, равны, соответственно $-1,44 e^2/\epsilon l$ и $-1,29 e^2/\epsilon l$.

Трехэлектронное состояние с полиномом P_3 (5) также имеет отрицательную энергию $-0,93 e^2/\epsilon l$. В случае необходимости без большого труда могут быть рассчитаны и более сложные электронные конфигурации. Существование связанных на примеси многоэлектронных состояний необходимо учитывать при интерпретации эксперимента.

5. В приближении сильного поля (сохраняется число частиц на уровне Ландау) может быть поставлена задача о спектре дырочной системы, когда на основном уровне имеется несколько незанятых состояний. С точностью до сдвига начала отсчета энергии все результаты остаются прежними. Отметим, правда, что дырки отталкиваются от положительной примеси. Если на основном уровне имеется одно вакантное место, а один электрон находится на первом уровне Ландау или же перевернут его спин, то за счет взаимодействия типа электрон — дырка возникают новые ветви спектра экситонного и спинволнового типов. Их расчет имеет много общего с задачей об экситоне Мотта в сильном поле [2, 3]. Существенное отличие состоит в необходимости в нашем случае корректно учесть обменный вклад в энергию. Спектр, естественно, оказывается сплошным из-за разного знака зарядов взаимодействующих частицы и дырки. Не вдаваясь в детали вычислений, при-

ведем результаты:

$$E_{ex} = \frac{e\hbar H}{m^*c} + \frac{e^2}{2\epsilon l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - e^{-p^2/4} \left[\left(1 + \frac{p^2}{2} \right) I_0\left(\frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{2} I_1\left(\frac{p^2}{4}\right) \right] + \sqrt{\frac{2}{\pi}} p l^{-p^2/2} \right\}, \quad (7)$$

$$E_s = 2\mu^*H + \frac{e^2}{\epsilon l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - e^{-p^2/4} I_0(p^2/4) \right]. \quad (8)$$

Здесь I_0 , I_1 — модифицированные функции Бесселя, непрерывное квантовое число p соответствует обобщенному импульсу в единицах l^{-1} [2]. Экситонная ветвь (7) аналогична по природе щелевой ветви колебаний

вигнеровского кристалла [1]. При $p \ll 1$ $E_{ex} \approx \frac{e\hbar H}{m^*c} + \frac{e^2 p}{2\epsilon l}$, $E_s \approx 2\mu^*H + ap^2$. Отметим также, что верхние границы спектров ($p \gg 1$) превышают, соответственно, $e\hbar H/m^*c$ и $2\mu^*H$.

Мы благодарны Э.И.Рашба и И.Е.Дзялошинскому за обсуждение, а также И.В.Лернеру и Ю.Е.Лозовику за важную для нас информацию об их работе.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 декабря 1980 г.

Литература

- [1] Н.Фукуяма. Technical Report of ISSP, Ser. A, №993, 1979.
[2] Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. ЖЭТФ, **53**, 717, 1967.
[3] И.В.Лернер, Ю.Е.Лозовик. ЖЭТФ, **78**, 1167, 1980.