Письма в ЖЭТФ, том 33, вып. 3, стр. 176 – 181 *5 февраля 1981 г.*

ГРАССМАНОВА АНАЛИТИЧНОСТЬ И РАСШИРЕНИЕ СУПЕРСИММЕТРИИ

А.Гальперин[1]*. Е.Иванов, В.Огиевецкий*

Вводится понятие аналитичности по грассмановым спинорным переменным. Показано, как это понятие позволяет реализовать $N = 2$-суперсимметрию на обычном комплексном $N = 1$ суперполе вне массовой оболочки.

---

[1] ИЯФ АН Уз ССР.

Светлой памяти Ф.А. Березина посвящается.

1. В теории суперсимметрий в качестве вещественной грассмановой переменной естественно выступает майорановский спинор

$$\Theta_\alpha = \begin{pmatrix} \Theta_\alpha \\ \overline{\Theta}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \Theta = C\overline{\Theta}^{\,T}, \tag{1}$$

где Θ_α, $\overline{\Theta}^{\dot\alpha}$ – сопряженные Вейлевские спиноры, а C – матрица зарядового сопряжения. В расширенных N-суперсимметриях при прямолинейном подходе возникает сразу N грассмановых переменных. Уже простейшее суперполе $\Phi(x, \Theta^1, \Theta^2, .. \Theta^N)$ содержит 2^{4N} полевых компонент.

Цель настоящей статьи – ввести понятие грассмановой аналитичности и продемонстрировать на одном простом примере из $N = 2$-суперсимметрии как с его помощью уменьшить число грассмановых переменных. Условие аналитичности Коши – Римана

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) = 0$$

имеет следующий аналог для грассмановых переменных

$$\left(\widetilde{D}^{\Theta}_\alpha + i\widetilde{D}^{\eta}_\alpha\right)\Phi(x, \Theta, \eta) = 0, \tag{2}$$

где $\widetilde{D}^{\Theta}_\alpha$ ($\widetilde{D}^{\eta}_\alpha$) – ковариантная спинорная производная по грассмановой переменной $\Theta(\eta)$. Это условие, выражающее "независимость" суперполя от переменной $\Theta - i\eta$, позволяет перейти к комплексному скалярному суперполю от одной грассмановой переменной $V(x, \Theta)$. Отметим, что в двумерном случае условие вида (2) использовалось в теории суперсимметричных струн [1]. Далее, в $N = 1$ обычной суперсимметрии киральность также интерпретируема как аналитичность. Действительно, условие киральности

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\,\Psi(x, \Theta) = 0 \tag{3}$$

означает, что $\Psi(x, \Theta)$ зависит только от левого Вейлевского спинора Θ^α и не зависит от сопряженного ему правого $\overline{\Theta}^{\dot\alpha}$. Решение уравнения (3), как известно, есть –см., например, [2])

$$\Psi(x, \Theta) = a(x_L) + \Theta^\alpha\Psi_\alpha(x_L) + \Theta^\alpha\Theta_\alpha b(x_L), \qquad x^a_L = x^a + \frac{1}{2}\overline{\Theta}\gamma^a\gamma_5\Theta\,. \tag{4}$$

Решение условия аналитичности (2) будет приведено ниже и использовано для сведения суперполя от двух майорановских грассмановых переменных к суперполю, определяемому одной грассмановой переменной.

2. Приступим к нашей задаче. Мы пришли к грассмановой аналитичности, отправляясь от известного факта, что комплексифицированные $N = 1$-супермультиплеты на массовой оболочке являются представлениями $N = 2$-суперсимметрии с центральным зарядом (см., например [3]). Оказывается, что это имеет место и для суперполей вне массовой оболочки. Рассмотрим комплексное суперполе $V(x, \Theta)$. В его разложе-

нии по компонентам

$$V(x,\Theta) = \frac{1}{m}M(x) - i\bar{\Theta}\frac{\Psi^2}{m}(x) + \frac{1}{2}\bar{\Theta}\Theta\frac{P^{12}}{m}(x) + \frac{1}{2}\bar{\Theta}\gamma_5\Theta S(x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\bar{\Theta}i\gamma^a\gamma_5\Theta V_a(x) + \bar{\Theta}\Theta\bar{\Theta}\left[\Psi^1(x) - \frac{1}{2m}\partial\!\!\!/\Psi^2(x)\right] + \frac{1}{4}(\bar{\Theta}\Theta)^2 \times$$

$$\times \left[iP^{11}(x) - \left(\frac{\Box}{2m} + m\right)M(x)\right] \tag{5}$$

участвуют комплексные векторное и скалярные поля $V_a(x)$, $M(x)$, $S(x)$, образующие синглеты $0(2)$, $P^{ij}(x)$ – комплексный бесшпуровый симметрический тензор $0(2)$ и $\Psi^i(x)$ – $0(2)$ – дублет дираковских спиноров. Действие для $V(x,\Theta)$

$$S = \int d^4x d^4\Theta \frac{1}{2} V^*(x,\Theta)\left[\Box + \frac{(\bar{D}D)^2}{16} + m^2\right]V(x,\Theta) = \tag{6а}$$

$$= \int d^4x\Big\{-\frac{1}{2}F^*_{ab}(x)F^{ab}(x) + m^2\overset{*}{V_a}(x)V^a(x) + \partial_a M^*(x)\partial^a M(x) - m^2M^*(x)M(x) +$$

$$+ m^2S^*(x)S(x) + \frac{1}{2}P^{ij*}(x)P^{ij}(x) + i\bar{\Psi}^k(x)\partial\!\!\!/\Psi^k(x) + im\epsilon^{kl}\bar{\Psi}^k(x)\Psi^l(x)\Big\} \tag{6б}$$

инвариантно относительно преобразований $0(2)$-суперсимметрии:

$$\delta V_a = \bar{\epsilon}^k i\gamma_a\gamma_5\Psi^k + \frac{i}{m}\epsilon^{kl}\bar{\epsilon}^k\gamma_5\partial_a\Psi^l,$$

$$\delta\Psi^i = iP^{ij}\epsilon^j + \left(-mM + \frac{i}{2}\sigma_{ab}\gamma_5F^{ab}\right)\epsilon^i +$$

$$+ \epsilon^{ik}(-im\gamma_5S + m\gamma^a\gamma_5V_a - \partial\!\!\!/M)\epsilon^k,$$

$$\delta M = -i\epsilon^{ij}\bar{\epsilon}^i\Psi^j, \quad \delta S = \bar{\epsilon}^i\gamma_5\Psi^i - \epsilon^{kl}\bar{\epsilon}^k\gamma_5\frac{\partial\!\!\!/}{m}\Psi^l,$$

$$\delta P^{ij} = -\bar{\epsilon}^i(\partial\!\!\!/\Psi^j + m\Psi^k\epsilon^{jk}) + \frac{1}{2}\delta^{ij}\bar{\epsilon}^l(\partial\!\!\!/\Psi^l + m\Psi^k\epsilon^{lk}) + (i\leftrightarrow j). \tag{7б}$$

В этих формулах $F_{ab} = \partial_a V_b - \partial_b V_a$, $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ $\partial\!\!\!/ = \partial^m\gamma_m$ и индексы внутренней симметрии намеренно написаны на одном уровне, чтобы подчеркнуть, что сейчас мы имеем дело именно с $0(2)$, не с $SU(2)$. Параметром обычной суперсимметрии служит ϵ^1, а параметром второй суперсимметрии ϵ^2. В суперполевом виде эти преобразования записываются как

$$\delta V = -i\bar{\epsilon}^i Q^i V$$

причем

$$Q^{-1}_{\beta} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}^{\beta}} - (\partial\!\!\!/\Theta)_{\beta}, \tag{8а}$$

$$Q^{2}_{\beta} = -2m\Theta_{\beta} + \frac{1}{4m}\bar{D}DD_{\beta}; \qquad \left(D_{\beta} = \frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}^{\beta}} - i(\partial\!\!\!/\Theta)_{\beta}\right) \tag{8б}$$

и

$$\{\bar{Q}^{i}, Q^{k}\} = 2\delta^{ik}\gamma^{a}P_{a} + 2i\epsilon^{ik}Z. \tag{9}$$

Важно, что в нашей 0(2)-супералгебре имеется центральный заряд Z, пропорциональный массе

$$ZV = mV, \qquad ZV^{*} = -mV^{*}. \tag{10}$$

Как и электрический заряд, он принимает противоположные значения для частиц и античастиц. Несколько удивляет наличие члена с тремя спинорными производными в (8б). Покажем, что эти преобразования возникают естественным образом.

3. Для этого рассмотрим комплексное суперполе $\Phi(x, \Theta, \eta)$, которое удовлетворяет условию Коши – Римана (2), т. е. является аналитическим. Генераторы суперсимметрий для него естественно определяются в виде

$$Q^{1}_{a} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}^{a}} - (\partial\!\!\!/\Theta)_{a}, \quad Q^{2}_{a} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}^{a}} - (\partial\!\!\!/\eta)_{a} - 2\Theta_{a}Z \tag{11}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям (9). Действие Z на Φ, Φ^{*} определяется как в (10) с заменой V на Φ. Тогда операторы спинорных производных в условии (2) запишутся:

$$\tilde{D}^{\Theta}_{a} = \frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}^{a}} - i(\partial\!\!\!/\Theta)_{a} + 2i\eta_{a}Z, \qquad \tilde{D}^{\eta}_{a} = \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}^{a}} - i(\partial\!\!\!/\eta)_{a}. \tag{12}$$

Условие Коши – Римана можно разрешить (аналог (4)):

$$\Phi(x, \Theta, \eta) = e^{-m\bar{\eta}\eta}\phi(x^{m} - \bar{\Theta}\gamma^{m}\eta, \Theta + i\eta) = \tag{13а}$$

$$= e^{-m\bar{\eta}\eta}e^{-\bar{\Theta}\partial\!\!\!/\eta}e^{i\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}}}\phi(x, \Theta). \tag{13б}$$

Оказывается, что введенное выше суперполе $V(x, \Theta)$ выражается через $\phi(x, \Theta)$ следующим образом

$$V(x, \Theta) = \phi(x, \Theta) + \frac{1}{4m}\bar{D}D\phi(x, \Theta). \tag{14}$$

Тогда

$$\delta\Phi(x, \Theta, \eta) = -i\epsilon^{i}Q^{i}\Phi(x, \Theta, \eta) \tag{15}$$

соответствуют как раз преобразованиям (8) для $V(x, \Theta)$. Интересно, что действие (6) может быть записано в виде

$$S = \frac{1}{32} \int d^4x d^4\Theta d^4\eta\, \Phi^*(x, \Theta, \eta)\, \Phi(x, \Theta, \eta) = \tag{16а}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x d^4\Theta\, \phi^*(x, \Theta) \left[\Box + \frac{(\bar{D}D)^2}{8} + \frac{m}{2} \bar{D}D + m^2\right] \phi(x, \Theta) =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x d^4\Theta\, V^*(x, \Theta) \left[\Box + \frac{(\bar{D}D)^2}{16} + m^2\right] V(x, \Theta) . \tag{16б}$$

Запись (16) демонстрирует глубокую аналогию с обычных киральным лагранжианом.

4. Представление (13а) подсказывает наличие "аналитического" и "антианалитического" базисов:

$$x^m - \bar{\Theta}\gamma^m\eta, \quad \Theta + i\eta, \tag{17а}$$

$$x^m + \bar{\Theta}\gamma^m\eta, \quad \Theta - i\eta, \tag{17б}$$

напоминающих правый и левый базисы в $N = 1$ [4] и переходящих в них при $\eta \to \gamma_5\Theta$ (с должным изменением масштаба x из-за дифференцирования в (2)). Действительно, (17а) и (17б) образуют инвариантные пространства $N = 2$-суперсимметрии. Возникает надежда на формулировку $N = 2$-супергравитации, не содержащую сторонних ограничений и аналогичную предложенной в [4] для $N = 1$. В первую очередь для этого нужно расширить 0(2) до $SU(2)$ и изучить аналитические свойства супермультиплетов из [5]. В случае высших суперсимметрий можно думать о внутренней связи с системами гиперкомплексных чисел [6].

Мы проверили, что гиперкомплексные координаты

$$\tilde{x}^m = x^m + i\bar{\Theta}\gamma^m\eta_k e_k - \frac{i}{2}\bar{\eta}_k\gamma^m\eta_l f_{klp} e_p, \quad \tilde{\Theta} = \Theta + e_k\eta_k \tag{18}$$

$$(e_k e_l = -\delta_{kl} + f_{klp} e_p)$$

образуют инвариантные пространства $N = 4$-суперсимметрии (e_k – кватернионные единицы) и $N = 8$-суперсимметрии (e_k – октавные единицы). Эти вопросы будут обсуждаться в наших дальнейших публикациях.

Объединенный
институт ядерных исследований

Поступила в редакцию
1 декабря 1980 г.

Литература

[1] M. Ademollo, L.Brink et al. Nucl. Phys., B111, 77, 1976.

[2] A.Salam, J.Strathdee. Phys. Rev., 11D, 1521, 1975; В.Огиевецкий, Л.Мезинческу. УФН, 117, 637, 1975.

[3] P.Fayet P. Preprint LPTENS 80/7.

[4] V.Ogievetsky, E.Sokatchev. Phys. Lett., 79B, 222, 1978.

[5] P.Breitenlohner, M.F.Sohnius. Nucl. Phys., B165, 483, 1980; M.F.Sohnius, K.S.Stelle, P.C.West. Prepr. ICTP/79-80/51.

[6] J.Lukierski. Prepr. UGVA-DPT 1979/09-216.