Письма в ЖЭТФ, том 33, вып.5, стр. 292 – 295 *5 марта 1981 г.*

ОДНО- И ДВУХПЕТЛЕВЫЕ ИНВАРИАНТЫ В РАСШИРЕННЫХ СУПЕРГРАВИТАЦИЯХ

Р.Э.Каллош

Показано, что конечность первых двух петель в супергравитации $N = 8$ следует из суперсимметрии а в теориях $N = 2$, $N = 4$, при условии, что выполняется еще киральнo-дуальная инвариантность.

1. Вопрос об одно- и двухпетлевой перенормируемости расширенных супергравитаций $N = 2, \ldots, 8$,[1] с которыми связываются сейчас основные надежды на построение единой теории всех фундаментальных взаимодействий, до настоящего времени не был исследован, хотя была надежда, что увеличение N может только улучшить положение. Как известно, теория $N = 1$ в первых двух петлях конечна [1 – 3]. В этой теории в первой петле имеется только один суперинвариантный контрчлен, обобщающий $(R_{\mu\nu\alpha\beta})^2$ и исчезающий на массовой оболочке (МО). Во второй петле мог бы возникнуть только член $(R_{\mu\nu\alpha\beta})^3$, однако он запрещен суперсимметрией. В третьей петле есть кандидат в контрчлены [3].

2. Анализ суперинвариантных контрчленов в первых двух петлях в расширенных супергравитациях мы проведем, используя результаты работы автора [4], где описаны линеаризованные суперполя на МО для $N = 2, \ldots, 8$ и приведены точные суперинварианты начиная с 8-й петли[2] и линеаризованный трехпетлевой инвариант в теории $N = 8$. При этом анализе мы используем тот факт, что размерность dx равна -1, размерность $d\theta$ равна $1/2$, размерность гравитационной постоянной k равна -1. Размерность рассматриваемых суперполей будет указана всюду в дальнейшем.

Удобный способ сопоставления суперинвариантов числу петель состоит в том, чтобы использовать только суперполя из [4, 5], в которых поля всех спинов нормированы с помощью гравитационной постоянной k так, что в суперполе величина k уже не фигурирует. При этом бозонные поля Φ имеют размерность нуль, а спинорные – размерность $1/2$. С помощью этих полей весь исходный лагранжиан расширенной супергравитации представляется в виде $(1/k^2)L(\Phi, \chi_a, \ldots, g_{\mu\nu})$. Число петель l при этом равно числу пропагаторов n, из которого вычитается число вершин m, и *вся* зависимость контрчленов от k^2 имеет вид $k^{2(n-m+1)}$, т.е. $k^{2(l-1)}$ (даже в случае, когда соответствующий инвариант не содержит чисто гравитационного члена типа $(R_{abcd})^{l+1}$).

3. Рассмотрим однопетлевые и двухпетлевые контрчлены в супергравитации $N = 2$, где в компонентном формализме однопетлевые контр-

---

[1] N – это число градуированных параметров алгебры, или число сортов гравитино (полей спина 3/2).

[2] Линеаризованные суперполя на МО при $2 \leqslant N \leqslant 8$ и точные 8-петлевые инварианты в теории $N = 8$ были получены независимо в работе Хова и Линдстрема [5].

члены были проанализированы и коэффициенты перед ними вычислены впервые в [1]. В этой работе обсуждался контрчлен $R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$ ($R_{\mu\nu\alpha\beta}$ – кривизна, $F^{\mu\nu}$ – напряженность векторного поля) и предполагалось, что этот член запрещен дуальной инвариантностью. Кроме того, вычислялся коэффициент при контрчлене $T^2_{\mu\nu} = (F_{\mu\mu'} F_{\mu'\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2_{\mu'\nu'})^2$ и было обнаружено, что он равен нулю.

В суперполевом формализме на МО теория $N = 2$ описывается в линеаризованном приближении киральным суперполем размерности единица [4, 5]:

$$W_{ab} = F_{ab} + \theta^c_i \Psi^i_{abc} + \frac{1}{2} \theta^c_i \theta^d_j \epsilon^{ij} R_{abcd},$$
$$\bar{W}_{\dot{a}\dot{b}} = \bar{F}_{\dot{a}\dot{b}} + \bar{\theta}^{\dot{c}i} \bar{\Psi}_{i\dot{a}\dot{b}\dot{c}} + \frac{1}{2} \bar{\theta}^{\dot{c}i} \bar{\theta}^{\dot{d}j} \epsilon_{ij} \bar{R}_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}, \qquad (1)$$

где a, b – двухкомпонентные спинорные индексы, F, Ψ, R – напряженности полей спинов 1, 3/2 и 2 соответственно. В однопетлевом приближении из этого суперполя можно составить только один инвариант нулевой степени по k^2,

$$S^{l=1}_{N=2} = \int d^4x\, d^4\theta\, W_{ab} W_{ab} + \text{э.с.} = \int d^4x\, (R^2_{abcd} + \bar{R}^2_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}) + \ldots, \qquad (2)$$

исчезающий на МО. Инвариант $R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$, как мы видим из суперполевого формализма, запрещен не дуальностью, а просто суперсимметрией, которая также запрещает и вышеупомянутый член $T^2_{\mu\nu}$. В двухпетлевом приближении имеется нетривиальный линеаризованный инвариант

$$S^{l=2}_{N=2} = k^2 \int d^4s\, d^4\theta\, (W_{ab} W_{ab})^2 + \text{э.с.} = k^2 \int d^4x\, [F^2_{ab} R^2_{cdel} + \bar{F}^2_{\dot{a}\dot{b}} \bar{R}^2_{\dot{c}\dot{d}\dot{e}\dot{l}}] + \ldots \qquad (3)$$

Этот инвариант не содержит чисто гравитационной части. Возможно, однако, что он не имеет нелинейного обобщения. Заметим также, что в выражении (3) имеется интеграл по левому суперпространству только от левых киральных суперполей. Проанализируем его с точки зрения кирально-дуальной инвариантности [6]. Кирально-дуальная инвариантность на МО в линеаризованном суперполевом подходе означает, что при преобразовании $d\theta_{ai} \to a^{-1/2} d\theta_{ai}$, $d\bar{\theta}_{i\dot{a}} \to a^{1/2} d\bar{\theta}_{i\dot{a}}$, $W_{ab} \to a W_{ab}$, $\bar{W}_{\dot{a}\dot{b}} \to a^{-1} \bar{W}_{\dot{a}\dot{b}}$ контрчлены не должны зависеть от a. Двухпетлевой инвариант (3) запрещен указанной выше кирально-дуальной инвариантностью. Подчеркнем, однако, что линеаризованная суперсимметрия такой инвариант допускает, и что вопрос о конечности теории $N = 2$ во второй петле связан с менее надежной (в смысле возможных аномалий) кирально-дуальной инвариантностью.

Как известно, в трехпетлевом приближении в теории $N = 2$ суперсимметричный инвариент существует [7].

4. В теории $N = 3$ на МО имеется линеаризованное киральное спинорное суперполе, размерности 1/2:

$$W_a = \chi_a + \theta_i^b F_{ab}^i + \frac{1}{2!}\theta_i^b \theta_j^c \epsilon^{ijk} \Psi_{k\,abc} + \frac{1}{3!}\theta_i^b \theta_j^c \theta_k^d \epsilon^{ijk} R_{abcd}.$$

из него невозможно построить суперинварианты – кандидаты в контрчлены в первой и второй тепле, однако трехплетвлевой инвариент существует [4, 5].

В теории $N = 4$ на МО имеется линеаризованное киральное скалярное суперполе размерности нуль:

$$W = \Phi + \theta_i^a \chi_a^i + \frac{1}{2!}\theta_i^a \theta_j^b F_{ab}^{ij} + \frac{1}{3!}\theta_i^a \theta_j^b \theta_k^c \epsilon^{ijkl} \Psi_{l\,abc} +$$

$$+ \frac{1}{4!}\theta_i^a \theta_j^b \theta_k^c \theta_l^d \epsilon^{ijkl} R_{abcd}.$$

В однопетлевом приближении кроме обычного, исчезающего на МО члена, обобщающего $(R_{\mu\nu\alpha\beta})^2$, можно построить следующий кандидат в контрчлены:

$$S_{N=4}^{l=1} = \int d^4x d^8\theta W^4 + \text{э.с.} = \int d^4x \Phi^2 R_{abcd}^2 + \ldots$$

Этот инвариант, как вполне может оказаться, удастся запретить либо используя кирально-дуальную инвариантность, либо обнаружив, что он не имеет обобщения. Однако, как и в случае второй петли в $N = 2$, линеаризованная суперсимметрия его допускает.

5. Перейдем далее к наиболее интересному случаю теории $N = 8$. Эта теория описывается в линеаризованном приближении на МО скалярным суперполем W_{ijkl} размерности нуль [4, 5]. Как было показано в работе автора [4], суперполе W_{1234} в "собственном" базисе зависит только от "своих" грассмановых переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ и от "чужих" $\bar\theta^5$, $\bar\theta^6, \bar\theta^7, \bar\theta^8$, и аналогичная картина имеет место для остальных компонент поля W_{ijkl}. Это поле, таким образом, зависит от 16 грассмановых переменных (вместо 32 переменных $\theta_{ia}, \bar\theta_{\dot a}^i$, $i = 1,\ldots, 8$), и это позволяет записать минимальный по числу петель линеаризованный суперинвариент в теории $N = 8$ в виде

$$S_{N=8}^{l=3} = k^4 \int d^4x (d^8\theta\, d^8\bar\theta)_{\text{собств}} W_{1234}^4 = k^4 \int d^4x (R_{abcd}\bar R_{\dot a\dot b\dot c\dot d})^2 + \ldots,$$

причем он является также в $SU(8)$-инвариантом [4]. Из имеющихся в теории $N = 8$ полей спинов $0,\ldots, 2$ на массовой оболочке не удается построить других суперполей, которые дали бы линеаризованные инварианты в первых двух петлях. Интересно, что и исчезающий на массовой оболочке, но не равный нулю в топологически нетривиальных полях однопетлевой член типа (2) не удается построить в теории $N = 8$ (это, возможно, служит дополнительным указанием (см. [8]) на отсутствие конформной супергравитации при $N > 4$). Известно, с другой стороны, что

отсутствие контрчленов в линеаризованном приближении является достаточным условием отсутствия суперинвариантов [3]. Таким образом, супергравитация $N = 8$ в первых двух петлях оказывается конечной.

Я благодарю В.И.Огиевецкого и Е.С.Фрадкина за обсуждение затронутых в статье вопросов.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук

Поступила в редакцию
15 января 1981 г.

Литература

[1] M.T.Grisaru, P.van Nieuwenhuizen, J.A.M.Vermaseren. Phys. Rev. Lett., 37, 1662, 1976.

[2] M.T.Grisaru. Phys. Lett., 66B, 75, 1977.

[3] S.Deser, J.H.Kay, K.Stelle. Phys. Rev. Lett., 38, 527, 1977.

[4] R.E.Kallosh. Lebedev Phys. Inst. preprint No 152, 1980; Phys. Lett., (в печати).

[5] P.Howe, U.Lindström. Preprint Ref. TH. 2953-CERN 1980.

[6] P. van Nieuwenhuizen, J.A.M.Vermaseren. Phys. Lett., 65B, 263, 1976; S.Ferrara, J.Scherk, B.Zumino. Nucl. Phys., B121, 393, 1977.

[7] S.Deser, J.H.Kay. Phys. Lett., 76B, 400, 1980.

[8] B.de Wit, S.Ferrara. Phys. Lett., 81B, 317, 1979.