Письма в ЖЭТФ, том 33, вып.7, стр. 357 – 360 *5 апреля 1981 г.*

БЕСКОНЕЧНЫЙ НАБОР ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

А.П.Исаев

Найдено решение задачи Коши и построен бесконечный класс сохраняющихся величин для свободной замкнутой релятивистской струны.

По-видимому, главным достижением в последнее время в развитии квантовополевых методов можно считать точное решение нелинейных двумерных моделей, обладающих замечательным свойством: наличием бесконечного числа законов сохранения [1 – 4]. В связи с этим, становится чрезвычайно интересным нахождение новых систем, которые также обладают этим свойством (конечно, этот факт еще не говорит о полной интегрируемости модели).

В настоящей работе мы получим бесконечный набор нетривиальных сохраняющихся величин для свободной замкнутой релятивистской струны. Эта система, как хорошо известно [5], есть система со связями: $\chi_a = 0$,

$$\chi_0 = \frac{1}{2}\left(m^2 \overset{\prime}{x}_\mu x'^\mu + \frac{1}{m^2} p_\mu p^\mu\right), \quad \chi_1 = x'_\mu p^\mu, \quad x'_\mu = \frac{\partial}{\partial s} x_\mu . \qquad (1)$$

Здесь $x_\mu(\tau, s) = x_\mu(\tau, s + 2\pi)$ – мировая поверхность, заметаемая замкнутой струной в четырехмерном пространстве-времени, $p_\mu(\tau, s)$ – плотность импульса в точке s струны в момент времени τ, m – некоторый параметр размерности массы. Для систем со связями (1) роль гамильтониана играет линейная комбинация χ_0 и χ_1 [6] (алгебра связей (1) гарантирует отсутствие вторичных связей)

$$\mathcal{H}(\tau) = \int ds\, (V_0(\tau, s)\chi_0 + V_1(\tau, s)\chi_1) = \chi_0(V_0) + \chi_1(V_1) \qquad (2)$$

V_0 и V_1 – произвольные функции, конкретный выбор которых эквивалентен фиксации калибровки. Решение гамильтоновых уравнений движения запишем в виде

$$p_\mu(\tau, s) = U(0, \tau) * p_\mu(s), \quad x_\mu(\tau, s) = U(0, \tau) * x_\mu(s) \tag{3}$$

здесь $p_\mu(s)$ и $x_\mu(s)$ – начальные данные, $U(0, \tau)$ – оператор эволюции

$$U(0, \tau) = T \exp \int_0^\tau dt\, \mathcal{H}(t)$$

$$\exp\left(A * B\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \{A, \{A, \{A, \ldots\ldots\{A, B\}\}\ldots\}, \tag{4}$$

где $\{A, B\} = \int ds \left(\dfrac{\delta A}{\delta x_\mu} \dfrac{\delta B}{\delta p^\mu} - \dfrac{\delta A}{\delta p_\mu} \dfrac{\delta B}{\delta x^\mu} \right)$ – скобки Пуассона.

Скобки Пуассона в правых частях равенств (3) можно вычислить явно. Для этого достаточно заметить, что алгебра связей (1) есть прямая сумма двух алгебр, каждая из которых изоморфна алгебре перепараметризации (алгебре Вирасоро). Действительно, выберем образующие в пространстве связей (1) в виде

$$\begin{aligned} M(f) &= \chi_1(f) + \chi_0(f) = \int ds\, f(s)\, a^2(\tau, s), \\ K(f) &= \chi_0(f) - \chi_1(f) = \int ds\, f(s)\, b^2(\tau, s). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены новые переменные[1])

$$a_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{m} p_\mu + m x'_\mu\right), \quad b_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{m} p_\mu - m x'_\mu\right), \quad \{a, b\} = 0. \tag{6}$$

Для величин M и K получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} &\{M(f), M(g)\} = M(g'f - f'g), \quad \{M(f), K(g)\} = 0 \\ &\{K(f), K(g)\} = K(g'f - f'g), \quad f' = \frac{\partial}{\partial s} f, \quad g' = \frac{\partial}{\partial s} g \end{aligned} \tag{7}$$

что и доказывает приведенное выше утверждение.
Воспользовавшись равенствами (2), (5), (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} a_\mu(\tau, s) &= U(0, \tau) * a_\mu(s) = a_\mu(\Phi(\tau, s)) \frac{\partial}{\partial s} \Phi, \\ b_\mu(\tau, s) &= U(0, \tau) * b_\mu(s) = b_\mu(\Gamma(\tau, s)) \frac{\partial}{\partial s} \Gamma, \end{aligned} \tag{8}$$

---

[1]) В дальнейшем мы будем опускать массовый параметр m, который всегда можно восстановить соответствующим масштабным преобразованием.

где $a_\mu(s)$ и $b_\mu(s)$ – начальные данные, а функции V_0, V_1, Φ и Γ связаны соотношениями

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = +(V_0 + V_1)\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\tau} = -(V_0 - V_1)\frac{\partial\Gamma}{\partial s}. \tag{9}$$

Вспоминая определение (8) переменных a_μ и b_μ, систему (3) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} U(0,\tau) * p_\mu(s) = \frac{1}{2}\left[p_\mu(\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial s} + p_\mu(\Gamma)\frac{\partial\Gamma}{\partial s}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial s}x_\mu(\Phi) - \frac{\partial}{\partial s}x_\mu(\Gamma)\right] \\ U(0,\tau) * x_\mu(s) = \frac{1}{2}\int_\Gamma^\Phi p_\mu(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}(x_\mu(\Phi) + x_\mu(\Gamma)). \end{gathered} \tag{10}$$

По сути дела (10) есть общий вид решения задачи Коши[1]. Функции Φ и Γ связаны с функциями V_0 и V_1 соотношениями (9). Воспользовавшись этим решением, можно построить три величины (зависящие от двух аргументов), такие, что преобразование (3) сводится для них просто к перепараметризации:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{2}}A_\mu^1 = \int_{s_2}^{s_1} a_\mu(\tau, s)\,ds, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}A_\mu^2 = \int_{s_2}^{s_1} b_\mu(\tau, s)\,ds \\ A_\mu^3 = \int_{s_2}^{s_1} p_\mu(\tau, s)\,ds + x_\mu(\tau, s_1) + x_\mu(\tau, s_2). \end{gathered} \tag{11}$$

Теперь ясно, что любой параметрически инвариантный функционал J, построенный из величин A^1, A^2 и A^3, будет сохраняться ($U(0,\tau) * J = J$ или $\{\mathcal{H}, J\} = 0$). Будем искать J в виде:

$$\begin{aligned} J_1(q^\mu) &= \int ds_1 ds_2 a_\mu(\tau, s_1)\, a_\nu(\tau, s_2) \exp iq^\mu A_\mu^1, \\ J_2(q^\mu) &= \int ds_1 ds_2\, b_\mu(\tau, s_1)\, b_\nu(\tau, s_2) \exp iq^\mu A_\mu^2, \\ J_3(q^\mu) &= \int ds_1 ds_2\, a_\mu(\tau, s_1)\, b_\nu(\tau, s_2) \exp iq^\mu A_\mu^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь q^μ – некоторый четырехвектор. Для того, чтобы выполнялось соотношение $\{J_a, \mathcal{H}\} = \partial J_a/\partial\tau = 0$, необходимо и достаточно наложить на q_μ следующее условие

$$P_\mu q^\mu = 2\pi n, \tag{13}$$

где $P_\mu = \int_0^{2\pi} p_\mu(s, \tau)\,ds$ – полный импульс, а n – целое число. Условие (13) – есть условие периодичности подинтегральных выражений для J_a. Таким образом, J_a есть трехпараметрические производящие функции законов сохранения.

---

[1] Для случая бесконечной струны в калибровке $V_0 = 1$, $V_1 = 0$ решение задачи Коши было получено в работе [7].

Приведем несколько первых законов сохранения.

а) Закон сохранения полного импульса P

$$J_\mu = \int ds\ a_\mu(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} P_\mu ,\quad J_a^{\mu\nu}(q=0) = \frac{1}{2} P^\mu P^\nu ,$$

б) Закон сохранения углового момента $M_{\mu\nu} = \int ds\,(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu)$

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu} J_{3\mu\nu}(q, n=0)\big|_{q=0} = \{\text{ с учетом } qP = 0 \} = M_{\mu\nu} P_\mu$$

(по μ суммирования нет).

в)

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu}(J_1^{\nu\rho} + J_2^{\nu\rho})\Big|_{\substack{n=0\\ q=0}} = \{\text{ с учетом } qP = 0 \} = P^\nu t^{\rho\nu\mu}$$

(по ν суммирования нет).

Здесь $t_{\rho\nu\mu} = P_\rho \int ds\,(\psi'_\nu \psi_\mu + x'_\nu x_\mu)$ + (цикл. перест. $\rho\nu\mu$), и

$$\psi'_\mu = \frac{\partial}{\partial s}\psi_\mu = p_\mu(\tau, s) - P_\mu / 2\pi .$$

В заключение отметим, что величины $J_a(q)$ нельзя автоматически перенести в квантовый случай, так как в их подынтегральных выражениях стоят произведения любого числа операторов в одной точке. Для того, чтобы придать смысл квантовым величинам J_a , необходимо упорядочить их подынтегральные выражения и притом не нарушить свойство коммутативности с гамильтонианом. На частных примерах а), б), в) видно, что это возможно сделать.

Автор благодарен Б.А.Арбузову, П.С.Исаеву и Л.Д.Соловьеву за плодотворные обсуждения результатов, а также Г.П.Пронько, А.В.Разумову и Ф.В.Ткачеву за неоценимую помощь и поддержку.

Институт физики высоких энергий

Поступила в редакцию
20 января 1981 г.

Литература

[1] В.Е.Корепин, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 25, 143, 1975.

[2] А.Б.Замолодчиков. Письма в ЖЭТФ, 25, 499, 1977.

[3] A.B.Zamolodchikov, Al. B.Zamolodchikov. Nucl. Phys., B133, 525, 19

[4] Е.К.Склянин, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 40, 194, 1979.

[5] J.Scherk. Rev. Mod. Phys., 47, 123, 1975.

[6] П.Дирак. Лекции по квантовой механике, М., 1968.

[7] Б.М.Барбашов, Н.А.Черников. Препринт ОИЯИ Р2-7852, Дубна, 1974.