Письма в ЖЭТФ, том 33, вып.7, стр. 361 – 363 *5 апреля 1981 г.*

К СТРУКТУРЕ КОЛЕЦ САТУРНА

Б.Б. Кадомцев

В работе рассмотрена устойчивость кольца F Сатурна по отношению к развитию азимутально периодической структуры, которая была обнаружена спутником "Вояджер-1".

Пролетавший недавно вблизи Сатурна спутник "Вояджер-1" обнаружил азимутально периодическую структуру в наиболее удаленном от планеты кольце F. Внешне она выглядит как два переплетающихся рукава [1]. Представляет интерес рассмотреть возможность образования такого типа структуры под действием только сил гравитации планеты и вещества кольца.

Движение холодного вещества в плоскости кольца описывается уравнением:

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -\nabla(\phi_0 + \phi); \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \mathrm{div}(\sigma\mathrm{v}) = 0; \tag{1}$$

$$\phi_0 = -\gamma M_s / r; \quad \Delta\phi = 4\pi\gamma\sigma\delta(z), \tag{2}$$

где σ – поверхностная плотность, $\phi_0 + \phi$ – гравитационный потенциал, M_s – масса Сатурна, r – расстояние от центра Сатурна. В пренебрежении самогравитацией вещество кольца вращается с угловой скоростью $\Omega = \sqrt{\gamma M_S / r^3}$.

Пусть R – радиус кольца F. Считая кольцо узким, положим $r = R + x$ и перейдем в систему координат, вращающуюся с угловой скоростью $\Omega_0 = \sqrt{\gamma M_S / R^3}$. В этой системе координат уравнения (1) для стационарного течения принимают вид

$$(\mathrm{v}\nabla)\mathrm{v} - 2[\mathrm{v}\vec{\Omega}_0] = 2\Omega_0 \nabla F; \quad \mathrm{div}(\sigma\mathrm{v}) = 0, \tag{3}$$

где $F = \frac{3}{4}\Omega_0 x^2 - \phi / 2\Omega_0$.

Считая период структуры $\lambda \ll 2\pi R$, мы пренебрежем в (3) кривизной кольца и введем координату $y = \theta R$ вместо азимута θ. Предполагая, с другой стороны, что λ значительно больше ширины кольца Δ, пренебрежем в x-компоненте уравнения (3) первым нелинейным членом слева по сравнению со вторым. В этом приближении получаем:

$$v_y = -\frac{\partial E}{\partial x}. \tag{4}$$

Для узкого кольца, $\Delta \ll \lambda$, потенциал ϕ в пределах кольца можно считать не зависящим от x, так что v_y близко к невозмущенному значению $v_y \cong -\frac{3}{2}\Omega_0 x$. Подставляя это выражение в y-компоненту первого уравнения (3), найдем:

$$v_y = 4\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{2}{\Omega_0}\frac{\partial\phi}{\partial y}. \tag{5}$$

Здесь под ϕ можно понимать лишь переменную $\tilde{\phi}$, зависящую от y часть потенциала ϕ. Согласно (4), (5) имеем $v_y \cong v_y(x)$, $v_x \cong v_x(y)$, так что в этом приближении течение является несжимаемым, $\mathrm{div}\, v = 0$. Следовательно, $\sigma = \sigma(\Gamma)$, где функция потока Γ определена соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \Gamma}{\partial y}\,; \quad v_y = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x}; \quad \Gamma = \frac{3}{4}\,\Omega_0 x^2 - 2\,\tilde{\phi}/\Omega_0\,. \tag{6}$$

Здесь потенциал $\tilde{\phi}$ определяется уравнением (2), или

$$\Delta\tilde{\phi} = 4\pi\gamma\delta(z)\,[\sigma(\Gamma) - \langle\sigma(\Gamma)\rangle], \tag{7}$$

где $\langle\sigma\rangle$ – усредненное по азимуту значение σ.

Точка бифуркации, т.е. потеря устойчивости однородного по азимуту кольца, определяется из условия появления собственного решения у линеаризованного уравнения (7). Допустим, что для кольца, состоящего из двух рукавов, невозмущенная плотность $\sigma(x)$ может быть аппроксимирована выражением

$$\sigma(x) = \sigma_0\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 \exp\left(-x^2/\Delta^2\right), \tag{8}$$

где $\sigma_0 = M_F/\pi^{3/2}\Delta R$, M_F – масса кольца.

Для периодически возмущенного кольца $\sigma = \sigma(\Gamma)$, так что под x^2 в (8) нужно понимать $4\Gamma/3\,\Omega_0$. Подставляя (6) вместо Γ и линеаризуя (7), получим:

$$\Delta\tilde{\phi} = -4\pi\gamma\delta(z)\,\sigma_0\,\frac{8\tilde{\phi}}{3\Delta^2\Omega_0^2}\left(1 - \frac{x^2}{\Delta^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}\right). \tag{9}$$

Для узкого кольца с логарифмической точностью находим отсюда условие бифуркации:

$$M_F/M_S = A\left(\frac{\Delta}{R}\right)^2, \tag{10}$$

где $A = 3/_{32}\ln\dfrac{\lambda}{\Delta}$. Величина A не менее 10^{-2}, и при наблюдавшейся [2] величине $\Delta = 30 \div 50$ км по свечению оценка (10) (с учетом $R \approx 10^5$ км) дает значение $M_F/M_S \sim 10^{-9}$. Учитывая, что масса всех колец не превышает $10^{-6}\,M_S$, значение $M_F/M_S \sim 10^{-9}$ кажется возможным.

При переходе через точку бифуркации (10) в кольце должна начать развиваться периодическая структура, соответствующая последовательности сближений и раздвижений рукавов. Из структуры уравнения (7) можно усмотреть, что неустойчивость и появление периодического потенциала $\tilde{\phi}$ связаны с уменьшением v_y и увеличением плотности σ вблизи x – точек сепаратриссы линий потока $\Gamma = \mathrm{const}$. При захвате вещества в "острова" с $\tilde{\phi} > 0$ неустойчивость должна насытиться на определенной амплитуде. Если при этом свечение максимально вблизи сепаратриссы, то будет видна картина двух переплетающихся рукавов. Таким образом, кажется, не исключена возможность объяснения видимой картины структуры кольца F одними только гравитационными силами.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
3 февраля 1981 г.

Литература

[1] C.S.Suttun. New Scientist, **88**, 491, 1980.

[2] M.Waldrop. Science, **210**, 1107, 1980.