Письма в ЖЭТФ, том 33, вып.10, стр. 504 – 507 *20 мая 1981 г.*

РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ И ГИСТЕРЕЗИС В КВАНТОВОМ АНГАРМОНИЧЕСКОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

Н.Н.Розанов, В.А.Смирнов

Решена задача о резонансном возбуждении квантового ангармонического осциллятора внешней силой. Для периодической силы показано наличие гистерезиса колебаний, причем в резонансной кривой квантового осциллятора между "классическими" ветвями появляется новая ветвь.

В последнее время растет интерес к гистерезисным эффектам при воздействии оптического излучения на различные объекты [1, 2]. Наиболее элементарным объектом мог бы служить квантовый ангармонический осциллятор. Такая модель применима к широкому кругу задач, в том числе к описанию раскачки молекулярных колебаний лазерным излучением [3, 4]. Хотя гистерезис для классического случая хорошо известен [5], вопрос о гистерезисе решений уравнения Шредингера оставался открытым. Действительно, в квазиклассическом пределе ($\hbar \to 0$) отмечалась аналогия с классическим гистерезисом [6]. Однако, в работе [7] на основе учета следующих по $\hbar$ членов был сделан вывод о том, что квантовый осциллятор, в отличие от классического, может находиться только в одном состоянии (с бо́льшей энергией).

Рассмотрим уравнение Шредингера ($\hbar = m = 1$)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\omega^2(t)\,x^2\psi + f(t)\,x\psi - U_{\text{нл}}(x)\psi = 0. \quad (1)$$

Здесь $f(t)$ – внешняя сила с характерной частотой ω_f, $U_{\text{нл}}(x) = \alpha x^3 + \beta x^4$ – ангармоническая добавка к потенциалу $|\omega^2(t)/\omega_f^2 - 1| << 1$. В качестве нулевого приближения выберем когерентные состояния свободного гармонического осциллятора [8, 9] (H_n – полиномы Эрмита).

$$\psi_n^{(0)} = \Phi_n(x_1)\exp[i(\dot\eta^{(0)}x_1 - \epsilon_n t + \sigma_n^{(0)}(t))],\quad \Phi_n(x_1) = \left[\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{\omega_f}{\pi}}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\,\omega_f x_1^2\right)H_n\left(\sqrt{\omega_f}\,x_1\right), \quad (2)$$

где $x_1 = x - \eta^{(0)}(t)$, $\ddot\eta^{(0)} + \omega_f^2\eta^{(0)} = 0$, $\dot\sigma^{(0)} = \dfrac{1}{2}\left(\dot\eta^{(0)2} - \omega_f^2\eta^{(0)2}\right)$,

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_f,\quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Такое решение отвечает волновому пакету, центр тяжести которого двигается по классической траектории гармонического осциллятора с произвольной, ввиду линейности осциллятора, амплитудой колебаний. Перейдем в (1) к переменным $x_1 = x - \eta(t)$, t и будем искать решение в виде

$$\psi_n = \phi_n(x_1, t)\exp[a(t)x_1 - i\epsilon_n t + i\sigma(t)], \quad a(t) = i\dot{\eta} - \frac{3}{4\omega_f^2}(\alpha + 4\beta\eta). \quad (3)$$

В первом приближении по малым параметрам, пропорциональным α, β, f и $\omega^2(t) - \omega_f^2$, используя рекуррентные соотношения для Φ_n, получим

$$i\frac{\partial\phi_n}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}[\omega^2(t) + 6\alpha\eta + 12\beta\eta^2]x_1^2\phi_n + \epsilon_n\phi_n + X(t)x_1\phi_n +$$

$$+ Y(t)\phi_n = Z, \quad (4)$$

где

$$X(t) = f(t) - \ddot{\eta} - \omega^2(t)\eta - 3\alpha\eta^2 - 4\beta\eta^3 - (\alpha + 4\beta\eta)\frac{3\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2\omega_f} - i\frac{3\beta}{\omega_f^2}\dot{\eta}, \quad (5)$$

$$Y(t) = -\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}\omega^2(t)\eta^2 + f(t)\eta - \alpha\eta^3 - \beta\eta^4 - \frac{3\beta}{4\omega_f^2}(2n^2 + 2n + 1). \quad (6)$$

Величина X – первого порядка малости, однако она не может быть учтена в рамках стандартной теории возмущений, так как содержит резонансные члены. Поэтому необходимо требовать $X(t) = 0$, что дает вид уравнения движения для $\eta(t)$. Величина Z содержит нерезонансные члены – малую примесь состояний $\phi_{n\pm 2,\, n\pm 3,\, n\pm 4}$. Они могут быть учтены известным способом [8], но не дают вклада в уравнение движения. Член с $Y(t)$ устраняется соответствующим выбором $\sigma(t)$. Решение остающегося уравнения Шредингера для гармонического осциллятора с переменной частотой приведено в [9]. Заметим, что наше рассмотрение справедливо, если ϕ_n близки к невозмущенным функциям Φ_n. Это условие требует дополнительного обоснования в области параметрического резонанса [9]. Можно показать, что для ангармонического осциллятора этот случай эффективно сводится к нерезонансному с дополнительным малым изменением волновой функции. Уравнение движения при этом не меняется.

Вклад первого приближения от членов $\sim\alpha$ приводит к несущественному постоянному сдвигу и малым осцилляциям $\eta(t)$. Вклад второго порядка $\sim\alpha^2$ может быть учтен изменением коэффициента β. Поэтому положим в (5) $\alpha = 0$, а также $\omega^2(t) = \omega_0^2 = \text{const}$. Уравнение движения примет вид

$$\ddot{\eta} + \left[\omega_0^2 + 2\rho\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\eta + 4\beta\eta^3 + i\frac{\rho}{\omega_f}\dot{\eta} = f(t), \quad \rho = \frac{3\beta}{\omega_f}\left(= \frac{3\beta\hbar}{m^2\omega_f}\right). \quad (7)$$

Согласно (7) траектории движения центра тяжести волнового пакета являются комплексными. Классическое уравнение Дюффинга получается из (7) при $\rho \to 0(\hbar \to 0)$. Квантовые поправки относительно малы, если амплитуда колебаний $\eta(t)$ значительно превышает характерную ширину волнового пакета $\sim\omega^{-1/2}$.

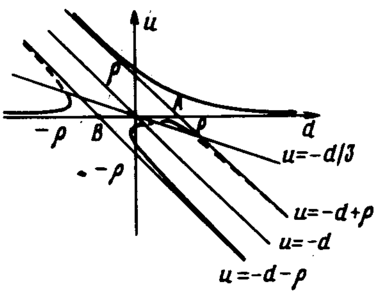
Пусть внешняя сила монохроматична $f(t) = A\cos\omega_f t$. Периодическое решение (7) ищем в виде

$$\eta(t) = \frac{1}{2}\left(p e^{i\omega_f t} + q e^{-i\omega_f t} \right). \tag{8}$$

Для величин $u = 3|\beta|pq$ и $v = 3|\beta|A^2$ получим

$$[(u + d)^2 - \rho^2]u = v, \quad d = \operatorname{sign}(\beta)\left[\omega_o^2 - \omega_f^2 + 2\rho\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]. \tag{9}$$

Для устойчивости решений необходимо требовать $(d + u)(d + 3u) \geq 0$. Комплексные решения (9) неустойчивы. Гистерезисная зависимость характеризуюшей интенсивность колебаний осциллятора величины u от расстройки d изображена на рисунке. В области резонанса ($d^2 \lesssim \rho^2$) имеются существенные отличия квантового осциллятора от классического, исчезающие при $\rho \to 0$. Между раздвинутыми на величину $\sim\rho$ "классическими" ветвями ($u > 0$) появляется новая ветвь ($u < 0$). Колебание (8) можно представить в виде $\eta(t) = b\cos(\omega_f t + \phi_c)$, при этом "фаза" ϕ_c будет мнимой. Это обстоятельство не позволило обнаружить гистерезис в работе [7], где фаза предполагалась вешественной. Заметим, что уравнение Шредингера (1) отвечает пренебрежению релаксационными процессами. Поэтому результаты , вообше говоря, оправданы для достаточно больших амплитуд силы $A > \gamma\sqrt{\omega}$, где γ – скорость релаксации. Это условие определяет минимальную мощность излучения, превышение которой необходимо для реализуемости эффектов, описываемых изображенной резонансной кривой.



Резонансная кривая для квантового ангармонического осциллятора. Пунктир отвечает неустойчивым решениям. Точки A и B соответствуют автоколебаниям с частотами $\omega_o^2 + 2\rho\ n + \frac{1}{2} \pm\rho^{1/2}$

Величина u характеризует число стационарных состояний, эффективно участвуюших в разложении когерентного состояния, и тем самым степень возбуждения осциллятора. Как видно из рисунка, степень возбуждения резко нарастает при уменьшении частотной расстройки d. Вопрос о резонансном возбуждении высших колебательных уровней молекул рассматривался в литературе [10, 11]. В интересующих нас резонансных условиях обычно используемая теория возмушений по внешнему полю неприменима.

Указанные эффекты могут наблюдаться в ИК спектрах простых молекул (например, CO, NO, HCl) при воздействии на них излучения лазера с перестраиваемой частотой. Ширина резонанса характеризуется величиной ρ 10 см$^{-1}$. Для молекулы HCl , положив скорость релаксации $\gamma = 0{,}01 \div 0{,}1$ см$^{-1}$, эффективный заряд $e^* = 0{,}1e$ [12] (e – заряд электрона), получим минимальное значение напряженности поля лазера $E \sim (\gamma / e^*) \sqrt{2m\hbar\omega} \sim 3 \cdot 10^4 \div 3 \cdot 10^5$ В/см, т.е. плотность мощности $1 \div 100$ МВт/см^2 (см. также [13]). Эти оценки могут объяснить наблюдавшееся в работе [14] возбуждение излучением сравнительно маломощного химического HCl-лазера молекул HCl на второй колебательный уровень, несмотря на значительный ангармонизм ($\omega_e x_e = 52$см$^{-1}$[12]).

Диэлектрическая проницаемость среды, состоящей из рассматривавшихся ангармонических осцилляторов, может быть неоднозначной функцией интенсивности поля, что ведет к своеобразным оптическим гистерезисным явлениям [15]. Так как в классическом аналоге (7) при $A > A_{кр}$ возникает странный аттрактор [16], то при этом естественно ожидать стохастического поведения решений уравнения Шредингера (1). Квантовое уравнение Дюффинга (7) описывает и ряд других нелинейных эффектов, в том числе при немонохроматическом возбуждении, а также автоколебания. Поскольку уравнение Шредингера (1) после замены $t \to z$ переходит в параболическое уравнение распространения оптических пучков, то полученные результаты дают и волновое описание полей в неоднородных волноводах и оптических резонаторах.

Авторы благодарны Ю.Т.Мазуренко за полезные обсуждения.

Государственный
оптический институт
им. С.И.Вавилова

Поступила в редакцию
26 марта 1981 г.

Литература

[1] В.Н.Луговой. Квантовая электроника, **6**, 2053, 1979.

[2] Н.Н.Розанов. ЖЭТФ, **80**, 96, 1981.

[3] Г.А.Аскарьян. ЖЭТФ, **46**, 403, 1964; **48**, 666, 1965.

[4] Ф.В.Бункин, Р.В.Карапетян, А.М.Прохоров. ЖЭТФ, **47**, 216, 1964.

[5] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М., изд. Наука, 1964.

[6] П.А.Браун. ТМФ, **37**, 355, 1978.

[7] В.Н.Сазонов. ТМФ, **31**, 107, 1977.

[8] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М., изд. Наука, 1974.

[9] А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., изд. Наука, 1971.

[10] В.С.Летохов. УФН, **125**, 57, 1978.

[11] Б.Ф.Гордиец, А.И.Осипов, Л.А.Шелепин. Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры. М., изд. Наука, 1980.

[12] Г.Герцберг. Спектры и строение двухатомных молекул. М., ИИЛ, 1949.

[13] C.Flytzanis, C.L.Tang. Phys. Rev. Lett., **45**, 441, 1980.

[14] D.Arnoldi, K.Kaufmann, J.Wolfrum. Phys. Rev. Lett., **34**, 1597, 1975.

[15] Н.Н.Розанов. Письма в ЖТФ, 7, 351, 1981.

[16] B.A.Huberman, J.P.Crutchfield. Phys. Rev. Lett., **43**, 1743, 1970.