Письма в ЖЭТФ, том 33, вып, 10, стр. 549 – 553 *20 мая 1981 г.*

КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ И "НЕСИНГУЛЯРНАЯ" ВСЕЛЕННАЯ

В.Ф.Муханов, Г.В.Чибисов

Показано, что квантовые флуктуации кривизны за конечное время разрушают несингулярное космологическое решение, соответствующее Вселенной с поляризованным вакуумом. Если обсуждаемое решение реализовалось как промежуточный этап эволюции, то спектр народившихся флуктуаций может обеспечить образование галактик и их скоплений.

Последнее время особое внимание привлекает космологическая несингулярная модель с поляризованным вакуумом [1]. Ранее уже отмечалось, что квантовые флуктуации могут оказаться существенными в космологии при плотностях энергии, сравнимых с планковской [2]. Так как обсуждаемая модель [1] характеризуется именно такими плотностями, то в данной работе мы исследуем роль квантовых флуктуаций для выяснения вопроса об отсутствии сингулярности в ней.

Однопетлевые поправки, описывающие поляризацию вакуума физических полей в сильном гравитационном поле, для изотропной метрики приводят к следующим Эйнштейновским уравнениям [3]

$$R^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k = \frac{1}{H^2}\left(R^i_l R^l_k - \frac{2}{3} R R^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k R^l_m R^m_l + \frac{1}{4}\delta^i_k R^2\right) -$$

$$- \frac{1}{6M^2}\left(2R^{;i}_{;k} - 2\delta^i_k R^{;l}_{;l} - 2RR^i_k + \frac{1}{2}\delta^i_k R^2\right), \qquad (1)$$

где коэффициенты M^2 и H^2 возникают как результат суммирования вкладов всех полей. Для устойчивости пространства Минковского необходимо, чтобы M^2 был положителен. При $H^2 > 0$ уравнение (1) имеют частное решение "де-ситтеровского" типа [1].

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - \sum_{a=1}^{3}(dx^a)^2\right), \qquad (2)$$

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}, \quad -\infty < \eta < 0, \qquad R = -12H^2 = \text{const}.$$

Инварианты кривизны, в частности R, не обладают особенностями при $\eta \to -\infty$, что говорит об отсутствии истинной сингулярности во Вселенной, описываемой метрикой (2).

Рассмотрим малые возмущения на фоне этой метрики, удовлетворяющие уравнениям (1). При этом ограничимся возмущениями скалярного типа. В синхронной системе отсчета ($\delta g_{i0} = 0$) они имеют следующую тензорную структуру

$$h^{\alpha}_{\beta} = -\frac{1}{a^2}\delta g_{\alpha\beta} = \left(\nabla^{\alpha}\nabla_{\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha}_{\beta}\Delta\right)\lambda - \frac{1}{3}\delta^{\alpha}_{\beta}\Delta\mu, \tag{3}$$

где $\nabla^{\alpha} = \nabla_{\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$, Δ – лапласиан.

Свертка линеаризованных по h^{α}_{β} уравнение (1), дает уравнение второго порядка для возмущений скаляра кривизны δR.

$$\delta R'' + 2\frac{a'}{a}\delta R' - \Delta\delta R - M^2 a^2 \delta R = 0, \tag{4}$$

где штрих означает дифференцирование по η, $a(\eta) = -1/H\eta$.

С помощью тех же уравнений (1) можно убедиться, что все интересующие нас величины (в частности h^{α}_{β}) выражаются через δR. Особая роль этой величины обусловлена ее инвариантностью относительно так называемых фиктивных возмущений [4], связанных с преобразованиями системы координат, не нарушающими синхронности. Действительно, фиктивные возмущения скалярных функций связаны с изменением начала отсчета времени [5], а так как в рассматриваемой "де-ситтеровской" модели R не зависит от времени (R = const), то следовательно, $\delta R = 0$ на фиктивных модах.

Выбрав возмущения скаляра кривизны в качестве физической переменной, можно получить действие для нее в виде [6]:

$$\delta S_b = \frac{1}{2}\int d^4x \left[\phi'^2 - \nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi + \left(\frac{a''}{a} + M^2 a^2\right)\phi^2\right], \tag{5}$$

где $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{18(4H^2 - M^2)}}\dfrac{a\delta R}{M l}$, $l = (8\pi G/3)^{1/2} = 4{,}37\cdot 10^{-33}$ см – планковская длина.

Переходя к квантованию необходимо отметить следующее: рассматриваемая физическая система (поляризованный вакуум в гравитационном поле) обладает конечной плотностью энергии, которая в соответствии с принципом неопределенности должна испытывать флуктуации. Последние представляют собой нулевые колебания поля коллективных возбуждений обычных физических полей ("скаляроны" с массой M).

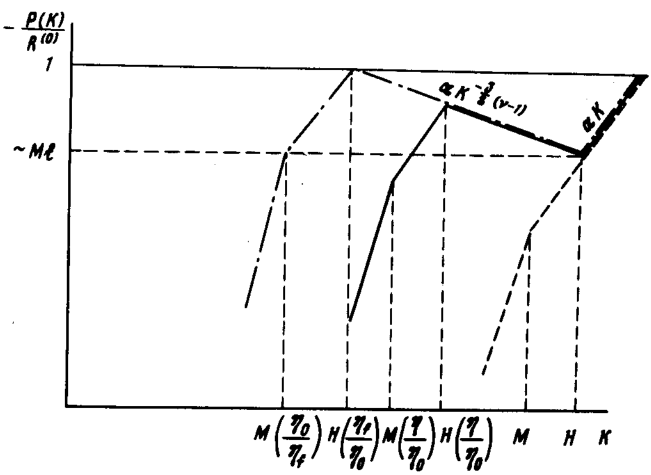
Процедура канонического квантования строится аналогично [7]. Результат ее сводится к возможности вычисления различных корреляционных функций, например

$$\langle 0|\delta\hat{R}(\mathbf{x})\delta\hat{R}(\mathbf{x}+\mathbf{r})|0\rangle = \frac{1}{2\pi^2}\int P^2(k)\frac{\sin kr}{kr}\frac{dk}{k}, \tag{6}$$

где k, r – физические волновой вектор и длина, измеряемые в см$^{-1}$ и см. Спектр $P(k)$ выражается через функции Бесселя порядка $^3/_2\,\nu = \dfrac{3}{2}\sqrt{1 + \dfrac{4}{9}\dfrac{M^2}{H^2}}$ и аргумента k/H, которые являются точными решениями уравнения (4). Вид спектра $P(k)$ нанесен на рисунке. Характерная особенность его – наличие максимума при $k \sim H(\eta/\eta_0)$ (η_0 – начальный момент, в который задается вакуум поля "скаляронов") и амплитуда возмущений в максимуме растет со временем. За конечное время, которое в наиболее интересном случае $M^2 << H^2$ равно

$$\delta t_f = \frac{3}{2H} \frac{H^2}{M^2} \ln\left(\frac{1}{2(\ell M)^2}\right) \tag{7}$$

амплитуда возмущений кривизны в максимуме достигает значений, характеризующих исходную фоновую модель, и Вселенная за счет множественного рождения "скаляронов" с конечными волновыми числами (в основном, с $k = H(\eta/\eta_0)$) переходит на стадию фридмановского расширения с обычным гидродинамическим веществом. Таким образом, мы видим, что учет квантовых флуктуаций, неизбежно присутствующих в системе, делает конечным время пребывания Вселенной в "де-ситтеровском" состоянии и тем самым ставит под сомнение возможность несингулярного начала для Вселенной. Независимо от характера сингулярности (классическая или квантовая) этот факт на наш взгляд значительно обесценивает эстетические достоинства исходной модели.



Спектр относительных флуктуаций кривизны $P(k)/R^{(0)}$ в зависимости от волнового вектора k. Пунктирной линией обозначен спектр вакуумных флуктуаций задаваемый в некоторый начальный момент η_0. Сплошной линией нанесен спектр в который переходит вакуумный в некоторый более поздний момент η. Штрих-пунктирной линией обозначен спектр в еще более поздний момент времени η_f

Конечность "де-ситтеровской" стадии еще не исключает возможности ее существования как промежуточного этапа в эволюции Вселенной. В связи с этим возникает интересный вопрос: не успеют ли на этой стадии народиться возмущения метрики, достаточные для образования галактик и их скоплений? Чтобы ответить на него, нам необходимо вычислить корреляционные функции флуктуаций метрики после перехода Вселенной с "де-ситтеровской" на гидродинамическую стадию. Аналогично (6) находим

$$< 0| \hat{h}(\mathbf{x})\hat{h}(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \,|\, 0 > = \frac{1}{2\pi^2}\int Q^2(k)\,\frac{\sin kr}{kr}\,\frac{dk}{k}\,, \tag{8}$$

где $h = h^{\alpha}_{\alpha}$ и в наиболее интересной области $H > k > H\exp\left(-\frac{3H^2}{M^2}\right)$ $(M^2 << H^2)$

$$Q(k) \approx 3\ell M\left(1 + \frac{1}{2}\ln\frac{H}{k}\right). \tag{9}$$

Таким образом, спектр флуктуаций оказывается почти плоским. Величина $Q(k)$ характеризует амплитуду возмущений с характерными масштабами $1/k$ в момент перехода Вселенной на обычное фридмановское расширение. При $M\ell \sim 10^{-3} \div 10^{-5}$ и $M/H \lesssim 0{,}1$, что не противоречит современным теориям элементарных частиц, амплитуда возмущений метрики в масштабах скоплений галактик оказывается равной $10^{-3} \div 10^{-5}$ и эти возмущения могут привести к образованию наблюдаемой крупномасштабной структуры Вселенной. Форма спектра (9) вполне согласуется с современными теориями образования галактик [5].

В заключение кратко сформулируем основные выводы. На примере модели "де-ситтеровского" типа показано, что квантовые флуктуации (нулевые колебания) приводят к конечности времени жизни Вселенной в состоянии с поляризованным вакуумом. Это заставляет усомниться в возможности несингулярного начала для Вселенной. Однако, модели, в которых "де-ситтеровская" стадия существует лишь как промежуточный этап эволюции, привлекательны в том отношении, что в них могут успеть народиться флуктуации метрики, достаточные для образования галактик. Тем самым открывается одна из возможностей для решения проблемы возникновения начального спектра возмущений.

Авторы благодарны В.Л.Гинзбургу, Я.Б.Зельдовичу, М.А.Маркову и А.А.Старобинскому за обсуждения.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 февраля 1981 г.
15 апреля 1981 г.

Литература

[1] А.А.Старобинский. Phys. Lett., 91B, 100, 1980.

[2] В.Л.Гинзбург, Д.А.Киржниц, А.А.Любушин. ЖЭТФ, 60, 451, 1971.

[3] T.S.Bunch, P.C.W.Davies. Proc. Roy. Soc.London, A356, 569, 1977.

[4] Е.М.Лифшиц. ЖЭТФ, 16, 587, 1946.

[5] Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Строение и эволюция Вселенной., М., изд. Наука, 1975.

[6] В.Ф.Муханов. Г.В.Чибисов. ЖЭТФ, **81**, вып. 8, 1981.

[7] A.A.Grib, S.G.Mamaev, V.M.Mostepanenko. Gen Rel. and. Grav, 7, 535, 1976.