Письма в ЖЭТФ, том 34, вып. 4, стр. 235 – 237 *20 августа 1981 г.*

КОНТУРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

Р.Л.Мкртчян

Получено контурное уравнение для обобщения вильсоновской петли на суперсимметричную калибровочную теорию поля.

Контурный подход [1 – 3] к неабелевым калибровочным теориям поля состоит, в частности, в переформулировке классических и квантовых уравнений движения в терминах нелокальной величины

$$u(C_{xy}) = P\exp\left(\int_{C_{xy}} A_m dx^m\right) \tag{1}$$

C_{xy} – кривая с началом в точке x и концом в точке y. В настоящей работе мы получим контурное уравнение, аналогичное уравнению Макеенко – Мигдала, для суперсимметричной калибровочной теории, т. е. для суперсимметричного обобщения величины $u(C)$. Суперсимметричное обобщение рассматривалось в работах [4, 5], в [5] оно применено для суперполевого вывода аномалии супертока в суперсимметричной КЭД. Суперсимметричное контурное уравнение, отличное от нашего, предложено в [6] однако для другой (абелевой) модели – Огиевецкого – Сокачева [7].

Далее мы рассматриваем стандартную суперсимметричную калибровочную теорию ($N = 1$) с неабелевой калибровочной группой [8].

Контур в суперпространстве – это набор $\{z^M(s)\} = \{x^m(s), \theta_\mu(s), \bar\theta_{\dot\mu}(s)\}$, где $\{x^m(s)\}$ – контур в обычном пространстве, θ_μ, $\bar\theta_{\dot\mu}$ – при каждом s независимые образующие бесконечномерной грассмановской алгебры с инволюцией (при которой $\theta_\mu \leftrightarrow \bar\theta_{\dot\mu}$) [9]. Преобразования суперсимметрии – супертрансляции контура, выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered} C \to C_T = \{x^m + i\theta\sigma^m\bar\eta - i\eta\sigma^m\bar\theta,\ \theta + \eta,\ \bar\theta + \bar\eta\}, \\ (\sigma^m)_{\alpha\dot\beta} = (1, \vec\sigma)_{\alpha\dot\beta}\ (\bar\sigma^m)^{\dot\alpha\beta} = (1, -\vec\sigma)^{\dot\alpha\beta} \end{gathered} \tag{2}$$

$\vec\sigma$ – матрицы Паули, η – постоянный (не зависящий от s) спинор.

Обобщение $u(C)$ для контуров в суперпространстве дается формулой [5]:

$$U(C_{z_1z_2}) = P\exp\left(\int_{C_{z_1z_2}} ds\, \dot z^M A_M\right), \quad \operatorname{Tr} U(C_{zz}) \equiv \psi(C), \quad \dot z^M = \frac{dz^M}{ds}. \tag{3}$$

Здесь A_M суперпотенциалы [8], которые при супертрансляциях преобразуются как "конвектор" (т. е. контравариантно по отношению к z^M) Суперпотенциалы A_A, которые являются уже суперполями (т. е. при супертрансляциях испытывают лишь замену аргумента) получаются из A_M умножением на тетраду [8]:

$$A_A = e_A^M A_M, \quad e_A^M = \begin{pmatrix} \delta_a^m & 0 & 0 \\ i(\sigma^m\bar{\theta})_a & \delta_a^\mu & 0 \\ i(\theta\sigma^m)_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{a}} & 0 & \delta_{\dot{\mu}}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \epsilon^{\dot{a}\dot{\beta}} = -\epsilon^{\dot{\beta}\dot{a}} = \epsilon_{\dot{\beta}\dot{a}} \\ \epsilon^{10} = 1 \end{matrix}. \tag{4}$$

Операции над функционалами от контура – производная по площадочке $\delta/\delta\sigma^{MN}$, ковариантная производная ∂_M, легко переносятся на случай контуров в суперпространстве, если воспользоваться их определением [2] через вариационные производные $\delta/\delta z^M(s)$. Если M спинорный индекс, то это левая фермионная вариационная производная [9]. Верны формулы, аналогичные обычным:

$$\frac{\delta\psi(C)}{\delta\sigma^{MN}(z)} = \mathrm{Tr}\, F_{MN} U(C_{zz}), \qquad F_{MN} = \left(\frac{\partial}{\partial z^M} A_N + A_M A_N\right) \pm (M \leftrightarrow N), \tag{5}$$

$$\partial_K \frac{\delta}{\delta\sigma^{MN}} \psi(c) = \mathrm{Tr}\, D_K F_{MN} U(C_{zz}), \qquad D_K = \frac{\partial}{\partial z^K} + [A_K, \quad]_\pm . \tag{6}$$

Производные с индексами A, B... получаются, как обычно, заменой в определениях $\delta/\delta z^M$ на $e_A^M\, \delta/\delta z^M$. Суперсимметричная калибровочная теория с $N = 1$ получается [8] при следующей редукции суперпотенциалов A_A к эрмитовому матричному суперполю $V(x\theta\bar{\theta})$:

$$A_{\dot{a}} = 0, \quad A_a = e^{-V} D_a e^V, \quad A_a = \frac{i}{4}\bar{\sigma}_a^{\dot{a}\beta}\bar{D}_{\dot{a}} A_\beta . \tag{7}$$

Операторы дифференцирования в правой части (7) приводят к появлению оператора ∇_A в правой части контурного уравнения (9).

Действие [8] приводит к уравнениям движения

$$\bar{D}_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^a)^{\dot{a}\beta} F_{\beta a} = 0. \tag{8}$$

Запись уравнений движения в геометрическом виде (8) позволяет, с помощью (6) записать их в виде уравнения на $\psi(C)$, и приводит к оператору в левой части контурного уравнения (9).

Действуя аналогично оригинальному выводу уравнения ММ [3], можно получить цепочку уравнений для "контурных функций Грина" $< \psi(C_1) \ldots . \psi(C_p) >$. Мы не приводим этих уравнений, так же как их вывода, ввиду их громоздкости, а приведем следствие из них – замкнутое уравнение для $\omega(C) = \langle {}^1/_n \psi(C) \rangle$ в пределе бесконечного числа цветов $(n \to \infty)$:

$$\bar{D}_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^a)^{\dot{a}\beta} \frac{\delta\omega(C)}{\delta\sigma^{\beta a}(z)} = \lambda \int_C ds\, \dot{z}_1^A \nabla_A(\omega(C_{z_1 z})\omega(C_{z z_1})\delta(z_1 - z)),$$

$$\nabla_A = \left[\frac{i}{4}\, \bar{\sigma}_a^{\dot{a}\beta}\left((1-a)\bar{D}_{\dot{a}} D_\beta - a D_\beta \bar{D}_{\dot{a}}\right),\ (1-a)D_a,\ \ -a\bar{D}_{\dot{a}}\right] \tag{9}$$

λ – константа связи.

Благодаря равенству $\int_C ds\, \dot{z}^M \frac{\partial}{\partial z^M} = 0$ в правой части (9) нет зависимости от произвольного параметра a. Уравнение (9) нужно дополнить уравнениями, соответствующими тождествам Бианки [8]. Мы приведем лишь одно, показывающее неоднозначность выбора оператора в правой части (9):

$$\bar{D}_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^a)^{\dot{a}\beta} \frac{\delta\omega(C)}{\delta\sigma^{\beta a}} + D_a(\bar{\sigma}^a)^{\dot{\beta}a} \frac{\delta\omega(C)}{\delta\sigma^{a a}} = 0\,. \tag{10}$$

Уравнение (9), как легко убедиться, инвариантно при супертрансляциях: если $\omega(C)$ – решение, то $\omega(C_T)$ – тоже решение. Это свойство обобщает свойства уравнения ММ [3] при обычных трансляциях.

Я благодарю А.А.Мигдала и Ю.М.Макеенко за интересные обсуждения.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 июля 1981г.

Литература

[1] Nambu Y. Phys. Lett., 1979, 82B, 247; Gervais J., Neveu A. Phys. Lett., 1979, 80B, 255.

[2] Polyakov A.M. Phys. Lett., 1979, 82B, 247; Nucl. Phys., 1979, B164, 171.

[3] Makeenko Yu.M., Migdal A.A. Phys. Lett., 1979, 88B, 135; preprint ITEP-23, 1980.

[4] Gervais J., Jackel M., Neveu A. Nucl. Phys., 1979, B155, 75.

[5] Marculescu S., Mezincescu L. Nucl. Phys., 1981, B181, 127.

[6] Makeenko Yu.M., Medvedev P.B. ITEP-31, 1981.

[7] Огиевецкий В., Сокачев Э. Письма в ЖЭТФ, 1976, 23, 66.

[8] Wess J. In Topics in Quantum fields Theory and Gauge Theories, Springer Verlag, Berlin, 1978, p. 275.

[9] Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М., изд. Наука, 1964.