

ПЕРЕХОД ФРЕДЕРИКСА В ХОЛЕСТЕРИКАХ В ОТСУТСТВИИ ВНЕШНИХ ПОЛЕЙ

Б.Я. Зельдович, Н.В. Тсбриан

Рассматривается холестерический жидкий кристалл в плоской ячейке, в которой жестко задана поверхностная ориентация директора по нормали к граням. Однородная гомеотропная структура неустойчива при $qL \geq \pi K_{33}/K_{22}$, где L — толщина ячейки, $h = 2\pi/q$ — шаг холестерика. Измерение перехода позволяет определить шаг холестерика h , что особенно важно при $h \gtrsim 1$ мкм.

Как известно, для мезофазы холестерического жидкого кристалла (ХЖК) устойчивой в больших объемах является спиральная структура. С другой стороны, на размерах $|\Delta r| \lesssim h = 2\pi/q$, меньших или порядка шага спирали h , ХЖК практически не отличается от нематического ЖК. Для нематиков возможна такая обработка поверхностей, что ориентация директора на них оказывается жестко закрепленной по нормали к поверхности. Соответствующая ориентация, однородная в объеме плоской кюветы с НЖК, носит название гомеотропной.

Ясно, что при толщине кюветы $L \ll h$ гомеотропная ориентация возможна и для холестериков, а при $L \gg h$ такая конфигурация неустойчива. Встает вопрос, возникают ли искажения гомеотропной структуры уже при малых L/h . В настоящей работе показано, что вплоть до порогового значения $(L/h)_{\text{пор}} = K_{33}/2K_{22}$ однородная гомеотропная структура остается устойчивой, а при небольшом превышении над порогом стационарная амплитуда искажения пропорциональна $(q/q_{\text{пор}} - 1)^{1/2}$.

Для рассмотрения задачи предположим, что директор $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ жестко закреплен в плоскостях $z = 0$ и $z = L$. Для однородной в плоскости (x, y) задачи можно принять

$$\mathbf{n}(z) = \mathbf{e}_x n_x(z) + \mathbf{e}_y n_y(z) + \mathbf{e}_z n_z(z) \equiv \vec{v}(z) + \mathbf{e}_z n_z(z), \quad (1)$$

$$n_x(0) = n_y(0) = n_x(L) = n_y(L) = 0$$

причем $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Свободная энергия ХЖК F (эрг/см³) имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \left[K_{11} (\text{div} \mathbf{n})^2 + K_{22} (\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{n} + q)^2 + K_{33} [\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{n}]^2 \right]. \quad (2)$$

Невозмущенное состояние соответствует $\mathbf{n}(z) = \mathbf{e}_z = \text{const}$. Считая возмущения $n_x(\mathbf{r}, t)$, $n_y(\mathbf{r}, t)$ малыми, варьированием (2) и диссипативной функции R (эрг/см³) $\cdot \text{сек} = 0,5 \eta \dot{\mathbf{n}}^2$ получим с точностью до членов порядка $\dot{\mathbf{v}}^3$ включительно:

$$-\eta \frac{\partial \vec{v}(z, t)}{\partial t} + K_{33} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} - 2K_{22} q \left[\mathbf{e}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right] + K_{22} q \vec{v}^2 \left[\mathbf{e}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right] = 0. \quad (3)$$

Здесь η (пуаз) — константа релаксации.

Нетрудно видеть, что $\vec{v}(z, t) = 0$ является точным решением задачи. Для выяснения вопроса об устойчивости этого решения следует ограничиться в (3) лишь линейными по \vec{v} членами. Общее решение линейризованного уравнения (3) имеет вид

$$v_i(z, t) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \exp(\Gamma_{\alpha} t) D_i^{\alpha}(z), \quad (4)$$

где $D_i^{(\alpha)}$ — собственные функции, а Γ_{α} — собственные значения эрмитова оператора:

$$\eta^{-1} \left[K_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta_{ik} + 2K_{22} q e_{ikz} \frac{\partial}{\partial z} \right] D_k(z) \approx \Gamma D_i(z), \quad (5)$$

с граничными условиями $\mathbf{D}(0) = \mathbf{D}(L) = 0$. Они имеют вид

$$\mathbf{D}_m^{(\pm)} = (\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y) \exp\left(\pm i \frac{K_{22}}{K_{33}} qz\right) \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad (6)$$

$$\Gamma_m = \eta^{-1} \left[-K_{33} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + q^2 \frac{K_{22}^2}{K_{33}} \right].$$

В связи с вещественностью исходного оператора собственные функции $\mathbf{D}_m^{(+)}$ и $\mathbf{D}_m^{(-)}$, отличающиеся комплексным сопряжением, имеют одинаковые Γ_m . Нетрудно видеть, что при $q = 0$ (т. е. для НЖК) все $\Gamma_m < 0$, и гомеотропная ориентация устойчива. При $q = q_0 = \pi K_{33} / K_{22} L$ собственное значение Γ_1 меняет знак, проходя через нуль. Этому и соответствует бесполевой переход Фредерикса (БПФ — ХЖК).

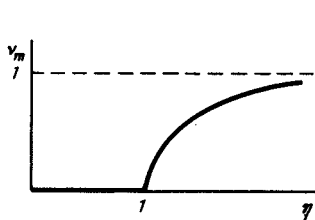


Рис. 1

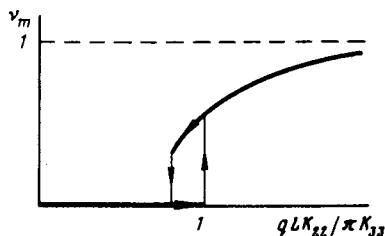


Рис. 2

Рис. 1. Схематическая зависимость равновесной амплитуды возмущения v_m от параметра $\eta = qLK_{22}/\pi K_{33}$ при условии $K_{11} - 3(K_{33} - K_{22}) > 0$.

Рис. 2. То же, что на рис. 1, при $K_{11} - 3(K_{33} - K_{22}) < 0$; в этом случае должен иметь место гистерезис

При превышении порога по параметру (L/h) возникает искаженная структура. При обратном уменьшении (L/h) возможно либо гистерезисное, либо однозначное поведение искажений, а реализация одного из этих двух вариантов зависит от знака величины $K_{11} - 3(K_{33} - K_{22})$.

При небольших превышениях над порогом амплитуда стабилизируется нелинейными по \vec{v} слагаемыми, которые при записи уравнения (3) были отброшены. Первыми неисчезающими являются поправки к уравнению (3) порядка v^3 . При $K_{11} - 3(K_{33} - K_{22}) > 0$ именно члены $\sim v^3$ стабилизируют амплитуду возмущения вблизи порога, и тогда записы-

вая $q = q_0 \eta$, где $(0 < \eta - 1 \ll 1)$, из нелинейных уравнений можно получить

$$\mathbf{n}(z) = \mathbf{e}_z \sqrt{1 - \overline{\nu}^2 + \overline{\nu}(z)},$$

$$\overline{\nu}(z) = \sqrt{\eta - 1} \sqrt{\frac{K_{11} - 3(K_{33} - K_{22})}{4K_{33}}} \sin \frac{\pi z}{L}$$

$$\left\{ \mathbf{e}_x \left(\sin \frac{\pi z}{L} - \beta \right) - \frac{q}{|q|} \mathbf{e}_y \cos \left(\frac{\pi z}{L} - \beta \right) \right\}, \quad (7)$$

где β — произвольный параметр. Состояние (7) отвечает слабозакрученной спирали с амплитудой, пропорциональной корню из превышения над порогом. Схематическая зависимость $\nu_m = |\overline{\nu}(z = L/2)|$ от параметра qL приведена в этом случае на рис. 1. Такая картина была бы, в частности, для одноконстантного ХЖК.

В случае $K_{11} - 3(K_{33} - K_{22}) < 0$ для определения стационарного состояния требуется решать нелинейные уравнения еще точнее, так как члены $\sim \nu^3$ уже не стабилизируют возмущения, а напротив, раскачивают их. Не приводя здесь соответствующих выкладок, укажем лишь, что БПФ в этом случае должен обладать гистерезисом, см. схематическую зависимость на рис. 2.

Регистрация порога БПФ — ХЖК может производиться простыми поляризационно-оптическими методами. Сам переход можно наблюдать, изменяя температуру, гидростатическое давление, концентрацию хиральной примеси, толщину кюветы и т. д. Явление БПФ — ХЖК позволит измерять параметр q для ХЖК в весьма интересной области малых q , где интерференционно-оптические методы неприменимы.

Авторы благодарят Е.И.Каца и Ю.С.Чилингаряна за ценные обсуждения.

Институт проблем механики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 августа 1981 г.