Письма в ЖЭТФ, том 34, вып. 8, стр. 460 – 463 *20 октября 1981 г.*

ЭВОЛЮЦИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ИЗОТРОПНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ОДНОПЕТЛЕВЫМИ КВАНТОВО-ГРАВИТАЦИОННЫМИ ПОПРАВКАМИ

А.А.Старобинский

Получены уравнения для малых возмущений однородных изотропных космологических моделей, учитывающие в однопетлевом приближении квантово-гравитационные эффекты, которые возникают при взаимодействии квантовых полей материи с самосогласованным гравитационным полем.

В однопетлевом приближении квантово-гравитационные эффекты можно учесть, добавив в правую часть уравнений Эйнштейна среднее значение тензора энергии-импульса $< T_i^k >$ всех квантовых полей, в том числе вклад от флуктуаций самого гравитационного поля. Полученные уравнения следует интерпретировать как уравнения для средних значений метрики пространства-времени. Они имеют смысл, если квантовые флуктуации метрики малы по сравнению с ее средними значениями, что имеет место, если числа заполнения всех рассматриваемых мод гравитационного поля $n_k >> 1$. Для однородных метрик это условие заведомо выполняется, если $| R_{iklm} R^{iklm}| << l_g^{-4}$, $l_g = \sqrt{G\hbar/c^3}$ (далее в статье принято $c = \hbar = 1$).

Пусть рассматриваемая метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(\gamma_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})\, dx^\alpha dx^\beta, \qquad (1)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $\gamma_{\alpha\beta}$ – трехмерная метрика постоянной кривизны, равной 1,0 или –1 (эти три случая будут обозначаться $\mathcal{K} = 1, 0, -1$ соответственно); $| h_\alpha^\beta | << 1$. Чтобы получить уравнения для $a(t)$ и $h_{\alpha\beta}$ в однопетлевом приближении, нужно вычислить $< T_i^k >$ для метрики (1).

Будем считать квантовые поля свободными и рассмотрим наиболее интересную область $| R_{iklm} R^{iklm}| >> m^4$, когда в первом приближении массой покоя частиц m можно пренебречь (подразумевается, что $ml_g << 1$). Предположим также, что все квантовые поля (или, по крайней мере, подавляющая их часть) становятся конформно-ковариантными при $m \to 0$. Тогда, в нулевом порядке по h, $< T_i^k >$ состоит из классической части (вклада от свободных частиц) и локальных членов, связанных с конформной аномалией следа (см., например, [1]):

$$< T > = - \frac{1}{2880\pi^2}\left[k_1 C_{iklm} C^{iklm} + k_2\left(R_{ik}R^{ik} - \frac{1}{3} R^2\right) + k_3 \Box R\right]. \qquad (2)$$

Постоянные k_1, k_2, k_3 зависят от вида поля; для фотонов, например, $k_1 = -13$, $k_2 = 62$, $k_3 = -18$. Для устойчивости классических решений уравнений Эйнштейна необходимо, чтобы $k_3 < 0$. Введем, согласно [2], обозначения $H^2 = 360\pi/Gk_2$, $M^2 = -(360\pi/Gk_3)$. Нелокальная вакуумная поляризация появляется в первом порядке по h; рождение реальных частиц $\hookrightarrow h^2$ и дается формулой [3]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{d\sqrt{-g}h}{dt} = \frac{\epsilon}{960\pi} C_{iklm}C^{iklm}, \qquad (3)$$

где $\xi = {}^1/_3(2k_1 + k_2)$; для нейтральных скалярных частиц $\xi = 1$, для четырехкомпонентных фермионов со спином 1/2 $\xi = 6$, для фотонов $\xi = 12$. Рассмотрим вначале частный случай $\mathcal{K} = 0$, $h_\alpha^\beta = h_\alpha \delta_\alpha^\beta$. Тогда для случая скалярного поля ответ можно получить из результатов [4] следующим способом. Нелокальная часть $< T_i^k >$ конформно ковариантна и отличается от приведенной в приложении I работы [4] только множителем a^{-4}. Локальная часть $< T_i^k >$ возникает из-за третьего вычитания и содержится в интегралах от величин $s^{(2)}, u^{(2)}, r^{(3)}, s^{(4)}, u^{(4)}$ выписанных в [4]. Выполнив длинные, но прямолинейные вычисления с использованием формул (22) и (II.I) работы [4], находим:

$$\epsilon \equiv < T_o^o > = 0(h^2),$$

$$p_\beta \equiv -< T_\beta^\beta > = \frac{1}{960\pi^2 a^4}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\eta}\omega^4\left(\ln\frac{m^2a^2}{\omega^2} + i\pi\,\mathrm{sgn}\,\omega\right) h_\beta(\omega)\,d\omega + 2\frac{a'}{a}h_\beta''' + \frac{2}{3}h_\beta''\left[2\left(\frac{a'}{a}\right)' + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right] + \frac{1}{3}h_\beta'\left[\left(\frac{a'}{a}\right)'' + 4\left(\frac{a'}{a}\right)'\frac{a'}{a}\right]\right\}, \qquad (4)$$

где $h_\beta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\beta(\eta)\,e^{i\omega\eta}\,d\eta$, $d\eta = dt/a$, штрих означает дифференцирование по η. Выражение для $< in \mid T_i^k \mid out > / < in \mid out >$ отличается от (4) только отсутствием $\mathrm{sgn}\,\omega$ в подынтегральном выражении. Результат (4) с точностью до множителя 2 совпадает с полученным в работе [5].

Зная вид нелокальной части $< T_i^k >$ и конформной аномалии, нетрудно найти выражение для квантовой части $< T_i^k >$ в первом порядке по h для общего вида слабо-неконформной метрики

$$ds^2 = a^2(x^i)\left[dx_o^2 - \sum_{\beta=1}^{3} dx_\beta^2 + h_{kl}(x^m)dx^k dx^l\right], \qquad (5)$$

где $| h_k^l | \ll 1$. Метрика (1) является частным случаем (5). Имеем:

$$8\pi G < T_i^k > = M^{-2}A_i^k + H^{-2}B_i^k + \frac{G\xi}{120\pi a^4}C_i^k,$$

$$A_i^k = \frac{1}{6}\left(2\delta_i^k R_{;l}^{;l} - 2R_{;i}^{;k} + 2RR_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R^2\right), \qquad (6)$$

$$B_i^k = R_i^l R_l^k - \frac{2}{3}RR_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R_l^m R_m^l + \frac{1}{4}\delta_i^k R^2 + 2C_{il}{}^{km}R_m^l,$$

$$C_i^k = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,e^{-iqx}H_i^k(q)\left[\ln\frac{|q^2|}{m^2a^2} - i\pi\theta(q^2)\,\mathrm{sgn}\,q_o\right] + 4\left(C_{il}{}^{km}{}_{;m}\sigma^{,l} + C_{il}{}^{km;l}\sigma_{,m} + C_{il}{}^{km}\sigma_{;m}^{;l}\right),$$

$H_i^k = 2C_{il}{}^{km;l}{}_{;m} + C_{il}{}^{km} R^l_m$, $C^i_i = H^i_i = 0$, $\sigma = \ln a$, $qx \equiv q_i x^i$.

Здесь A_i^k и B_i^k определены по метрике (5), а C_i^k и H_i^k – по метрике, стоящей в (5) в квадратных скобках (т. е. без конформного множителя a). Для перехода к $< in | T_i^k | out > / < in | out >$ достаточно опустить $\operatorname{sgn} q_0$ в C_i^k. При h_i^k, зависящих только от η, и $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ формула (6) переходит в (4). Слагаемое с C_i^k в (6) нужно удерживать только при выполнении условий $| C_{iklm} C^{iklm} | >> m^4$ и $\dfrac{|q^2|}{m^2 a^2} >> 1$, в противном случае его следует опустить. Слагаемые с A_i^k и B_i^k имеют место при выполнении значительно более слабого условия $| R_{iklm} R^{iklm} | >> m^4$. Тензор A_i^k удовлетворяет ковариантному закону сохранения точно: $A^k_{i\,;k} = 0$, а тензоры B_i^k и C_i^k – с точностью до величин $\backsim h^2$, в частности, $B^k_{i\,;k} = 2C_{iklm} C^{nklm}{}_{;n}$. Локальные члены в C_i^k получаются вариацией действия $\int d^4x \sqrt{-g}\, C_{iklm} C^{iklm} \sigma$.

Результат для $< T_i^k >$, приведенный в работе [6], отличается от (6) отсутствием локальных слагаемых в C_i^k, при этом под знаком логарифма вместо массы m стоит конформно-инвариантный импульс обрезания λ. Однако такой подход – не учитывать локальных слагаемых в C_i^k и сохранять A_i^k и B_i^k – является внутренне противоречивым, так как в теории с конформно-инвариантным параметром обрезания конформных аномалий вообще нет [7].

Подставляя полученный $< T_i^k >$ в правую часть уравнений Эйнштейна для метрики (1), получаем уравнения для малых возмущений. Эти уравнения являются обобщением классических уравнений Лифшица [8] и переходят в них при $M, H \to \infty$, $\xi \to 0$. В частности, при $\mathcal{K} = 0$ для возмущений тензорного типа (гравитационных волн) $h_\alpha^\beta = g_k(\eta) e_\alpha^\beta \exp(i\mathbf{kr})$, где e_α^β – поляризационный тензор, в отсутствие свободных частиц имеем ($k \equiv |\mathbf{k}|$):

$$g_k''\left(1 - \frac{R}{3M^2} + \frac{R - 2R^\circ_\circ}{3H^2}\right) + g_k'\left[2\frac{a'}{a}\left(1 - \frac{R}{3M^2} + \frac{2R^\circ_\circ}{3H^2}\right) - \frac{R'}{3M^2}\right] +$$

$$+ k^2 g_k\left(1 - \frac{R}{3M^2} + \frac{6R^\circ_\circ - R}{3H^2}\right) = \frac{G\xi'}{60\pi a^2}\left[-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\eta}(\omega^2 - k^2)^2 \times\right.$$

$$\left.\times L(\omega)\, g_k(\omega)\, d\omega + 2\frac{a'}{a}\left(g_k''' + k^2 g_k'\right) + \left(\frac{a'}{a}\right)'\left(g_k'' - k^2 g_k\right)\right], \qquad (7)$$

где $g_k(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_k(\eta) e^{i\omega\eta} d\eta$, $L(\omega) = \ln\dfrac{|\omega^2 - k^2|}{m^2 a^2(\eta)} - i\pi\theta(\omega^2 - k^2)\operatorname{sgn}\omega$,

а величины R и $R^\circ_\circ$ рассчитываются по невозмущенной метрике (при $h_\alpha^\beta = 0$).

Из (6) вытекает интересный, не замеченный ранее факт, что в отсутствие классического вещества скалярные возмущения на фоне квантовой стадии де Ситтера [2] являются конформно-плоскими ($\delta C_{iklm} = 0$). Гравитационные волны на этом же фоне описываются в точности уравнением Лифшица [8], причем все инварианты, составленные из тензора Вейля, обращаются в нуль. В соответствии со сделанным выше замечанием, при этом слагаемое с C_i^k в (6) надо опустить. Из (7) следует также, что построенная в [2] несингулярная изотропная модель Вселенной может существовать только при $M < 2H$. В противном случае она резко анизотропизуется до выхода на фридмановскую стадию в момент, когда

$$1 - \frac{R}{3M^2} + \frac{\dot{R} - 2R^{\circ}_{\circ}}{3H^2} = 0.$$

Уравнение (7) позволяет рассчитать время распада скаляронов на гравитоны τ_g. Подставляя в (7) закон эволюции на скаляронной стадии [2]

$$a(t) = a_1 t^{2/3}\left[1 + \frac{2}{3Mt}\sin M(t - t_1)\right].$$

получаем: $\tau_g = (3/GM^3)(k_3/k_1)^2$. В теориях, где $k_1 = 0$ [9] (так что конформная аномалия отсутствует при $R_{ik} = 0$), распад скаляронов на гравитоны запрещен.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3 сентября 1981 г.

Литература

[1] *Davies P.C.W., Fulling S.A., Christensen S.M., Bunch T.S.* Ann. Phys., **109**, 1977, 108.

[2] *Starobinsky A.A.* Phys. Lett., **91B**, 1980, 99.

[3] *Зельдович Я.Б., Старобинский А.А.* Письма в ЖЭТФ, **26**, 1977, 373.

[4] *Зельдович Я.Б., Старобинский А.А.* ЖЭТФ, **61**, 1971, 2161.

[5] *Hartle J.B., Hu B.L.* Phys Rev., **D,20**, 1979, 1772.

[6] *Horowitz G.T., Wald R.M.* Phys. Rev., D,**21**, 1980, 1462.

[7] *Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.* Phys. Lett., **73B**, 1978, 209.

[8] *Лифшиц Е.М.* ЖЭТФ, **16**, 1946, 587.

[9] *Christensen S.M., Duff M.J., Gibbons G.W., Roček M.* Phys. Rev. Lett., **45**, 1980, 161.