Письма в ЖЭТФ, том 34, вып. 11, стр. 613 – 616 *5 декабря 1981 г.*

СТОХАСТИЧНОСТЬ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЯНГА – МИЛЛСА И ЕЕ УСТРАНЕНИЕ МЕХАНИЗМОМ ХИГГСА

С.Г.Матинян, Г.К.Саввиди, Н.Г.Тер-Арутюнян-Саввиди

Показано, что механизм Хиггса устраняет обнаруженную в [1] стохастичность классической механики Янга – Миллса (ЯМ). При критическом значении параметра, характеризующего систему ЯМ – Хиггса ($\pi_c \approx 0,15$), имеет место фазовый переход.

В предыдущей работе авторов [1] исследовались классические уравнения ЯМ в пространстве Минковского без внешних источников, когда в некоторой системе координат векторный потенциал $A^a_\mu(x)$ зависит только от времени (см. [1, 2]). Система, описываемая такими потенциалами $A^a_\mu(t)$, сводится к дискретной нелинейной механической системе (классическая механика ЯМ) с гамильтонианом [1]

$$H_{\text{YM}} = \Sigma \frac{1}{2} (\dot{A}^a_i)^2 + \frac{g^2}{4} [(A^a_i A^a_i)^2 - (A^a_i A^a_j)^2] \tag{1}$$

и уравнениями связи

$$M^a \equiv \epsilon^{abc} A^b_i \dot{A}^c_i = 0. \tag{2}$$

У системы (1), для группы $SU(2)$, девять степеней свободы ($a, i = 1, 2, 3$) и четыре сохраняющихся интеграла: H_{YM}, $M_i = \epsilon_{ijk} A^a_j \dot{A}^a_k$. С увеличением размерности калибровочной группы число "недостающих" интегралов растет как $2N^2 - 6$ для группы $SU(N)$.

Сильная неустойчивость траекторий в двух- и трехмерных подсистемах (1), с потенциалами $U_2 = {g^2}/_2 (A^1_1 A^2_2)^2$,

$$U_3 = \frac{g^2}{2} [(A^1_1 A^2_2)^2 + (A^1_1 A^3_3)^2 + (A^2_2 A^3_3)^2]$$

привела нас к выводу об их стохастичности [1]. Несколько позже этот вывод был подтвержден в работе [3]. Характерным свойством исследованных в [1] систем является также наличие у них по крайней мере счетного множества периодических траекторий.

В последние годы большой интерес приобрел вопрос о реализации той или иной фазы в калибровочных теориях [4] (фаза конфайнмента – беспорядка; фаза Хиггса – порядка). По аналогии будем считать, что отсутствию полного набора изолирующих интегралов в классической системе соответствует фаза беспорядка (например, у системы (1)), а системам с полным набором изолирующих интегралов (когда их число равно числу степеней свободы) соответствует фаза порядка.

В связи с вышесказанным представляется интересным исследовать фазы классических калибровочных систем со спонтанным нарушением симметрии.

Рассмотрим калибровочную теорию с изодублетным нарушением группы $SU(2)$ в калибровке $A^a_0 = 0$. Соответствующий (1) гамильтониан теперь имеет вид

$$H = H_{YM} + \frac{1}{2}(\dot{B}^2_a + \dot{\sigma}^2) + \frac{g^2}{4}(A^a_i A^a_i) \times$$

$$\times \left[\frac{B^2_a}{2} + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \eta\right)^2\right] + \lambda^2 \left[\frac{B^2_a}{2} + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \eta\right)^2 - \eta^2\right]^2, \qquad (3)$$

а уравнения связи выглядят как:

$$\epsilon^{abc} A^b_i \dot{A}^c_i - \frac{\eta}{\sqrt{2}} \dot{B}_a + \frac{1}{2}\left[\sigma \dot{B}_a - B_a \dot{\sigma} - \epsilon^{abc} B_b \dot{B}_c\right] = 0, \qquad (4)$$

где η – вакуумное среднее скалярного поля ϕ:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iB_1 + B_2 \\ \sqrt{2}\eta + \sigma - iB_3 \end{pmatrix}.$$

Подробно исследуем двумерный случай (см. [1]), когда $A^1_1 \equiv x$, $A^2_2 \equiv y$, а все остальные компоненты A^a_i, B_a и σ равны нулю

$$H \equiv \mu^4 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{g^2}{2}(xy)^2 + \frac{g^2\eta^2}{4}(x^2 + y^2). \qquad (5)$$

Движения системы (5) характеризуется одним параметром

$$\pi = \left(\frac{g}{2}\right)^2 \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^4 \tag{6}$$

в чем нетрудно убедиться с помощью преобразования $x \to ax$, $y \to a y$, $t \to \beta t$.

Целью настоящей работы является вычисление критического значения параметра π_c, при котором происходит фазовый переход в следующем смысле: при больших значениях π система близка к интегрируемой и движение в фазовом пространстве $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ представляет собой обмотку тора [5] (мера эргодических траекторий равна нулю [6]), т. е. реализуется фаза порядка, а для малых, но конечных значений π ($\pi < \pi_c = 0{,}15$) движение, как и при $\pi = 0$ [1], стохастично, т. е. реализуется фаза беспорядка.

Опишем кратко эксперимент на ЭВМ, с помощью которого определяется π_c. (Первые эксперименты такого типа ставились Контопулосом, Хеноном, Хейлесом, Фордом и др. [7]). ЭВМ была запрограммирована на решение уравнений движения системы (5) при заданном π, и на высвечивание точек пересечения фазовой траектории в пространстве $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ с плоскостью $(y, \dot{y})$ при $\dot{x} > 0$. Если движение периодическое, то пересечение происходит в конечном числе точек, если оно ограничено поверхностью тора, то точки ложатся на замкнутую кривую в плоскости $(y, \dot{y})$, и, наконец, при эргодическом движении – точка хаотически блуждает в плоскости $(y, \dot{y})$, плотно покрывая конечную площадь.

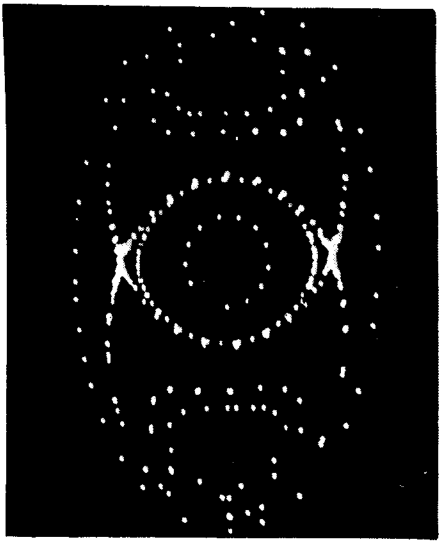

Рис.1

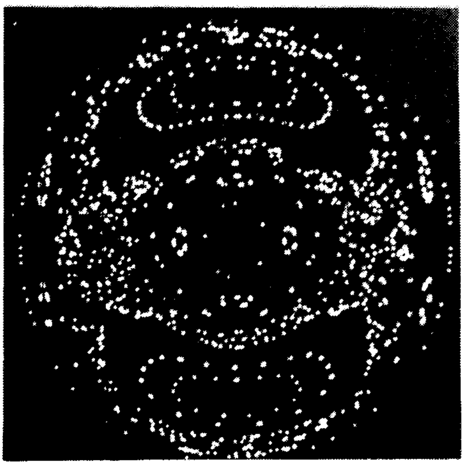

Рис.2

На рис. 1 приведена картина в плоскости $(y, \dot{y})$ для $\pi = 4{,}84$; видно, что точки образуют замкнутые кривые, в соответствии с КАМ-теоремой [6]. Центрам трех малых замкнутых кривых соответствуют устойчивые периодические траектории, а двум точкам соприкосновения замкнутых линий отвечают неустойчивые периодические траектории (сепаратрисы [5]). Именно в окрестности этих последних впервые возникают "макроскопические" области эргодического движения ненулевой меры (см. рис. 2, $\pi = 0,35$, ср. с [7]). При уменьшении параметра π площадь, занимаемая стохастическим движением, резко возрастает и при критическом значении $\pi = \pi_c \approx 0,15$ становится почти равной всей допустимой области движения на плоскости $(y, \dot{y})$, что иллюстрирует рис. 3 (все точки на этом рисунке представляют собой одну траекторию).

Рис.3

Пока не ясно, в какой мере описанное выше явление связано с квантовой теорией фазовых переходов [4], однако, как нам кажется, между ними существует глубокая связь.

В заключение авторы выражают свою признательность Ю.П.Можарову и другим сотрудникам вычислительного центра ЕрФИ за помощь при проведении вычислений на ЭВМ.

Ереванский
физический институт

Поступила в редакцию
13 октября 1981 г.

Литература

[1] *Матинян С.Г., Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г.* ЖЭТФ, 1981, **80**, 830.

[2] *Басеян Г.З., Матинян С.Г., Саввиди Г.К.* Письма в ЖЭТФ, 1979, **29**, 641.

[3] *Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **34**, 171.

[4] *Wilson K.* Phys. Rev., 1974, **D10**, 2445; *G.t'Hooft.* Nucl. Phys., 1978, **B138**, 1; *Mandelstam S.* Phys. Rev., 1979, **D19**, 2391.

[5] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.

[6] *Колмогоров А.Н.* ДАН СССР, 1954, **98**, 527; *Арнольд В.И.* УМН, 1963, **18**, 13; *Moser J.* Nachr. Acad. Wiss. Gottingen. 1962, No 1.

[7] *Contopoulos G.* Astron J., 1963, **68**, 14; *Henon M., Heiles C.* Astron. J.,1963, **69**, 73; *Walker G.H. J. Ford.* Phys. Rev., 1969, **188**, 416.