Письма в ЖЭТФ, том 26, вып. 5, стр. 373 –377 5 сентября 1977 г.

О СКОРОСТИ РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский

Вычислена локальная скорость рождения безмассовых частиц в слабоанизотропной однородной космологической модели, а также в слабом неоднородном гравитационном поле, в котором для волновых векторов ненулевых фурье-компонент выполнено условие $q^i q_i \geqslant 0$, во втором порядке теории возмущений. Скорость оказывается пропорциональной локальным значениям инвариантов тензора кривизны.

Хорошо известно, что в переменном гравитационном поле могут рождаться пары частица–античастица, в том числе с нулевой массой покоя. Различные аспекты этого эффекта рассматривались в большом числе работ. В частности, авторы рассчитали [1] среднее значение тензора энергии-импульса (ТЭИ) рождающихся скалярных частиц в случае, когда внешнее классическое гравитационное поле описывается однородной анизотропной метрикой, принадлежащей к первому типу Бианки. Это среднее значение оказывается сложным нелокальным причинным функционалом от метрики пространства-времени. Оно включает в себя вклад от реальных родившихся частиц и поляризации вакуума квантового поля, причем расщепление единого среднего значения ТЭИ квантового поля на ТЭИ реальных частиц и ТЭИ, описывающий поляризацию вакуума, в общем случае не является общековариантным и однозначным. Это связано с неоднозначностью определения понятия частицы-кванта поля (в отличие от оператора ТЭИ поля) в римановом пространстве-времени.

Если, однако, пространство-время является плоским при $t = \pm\infty$, то можно однозначно определить in- и out-вакуумы и рассчитать количество реальных частиц, рожденных из in-вакуума во всем пространстве в течение всего интервала времени $-\infty < t < \infty$. В настоящей работе обращается внимание, что в некоторых случаях можно найти локальную скорость рождения безмассовых частиц в единице объема в единицу времени, причем эта скорость зависит только от локальных значений инвариантов тензора Римана.

В качестве первого примера рассмотрим слабоанизотропную однородную космологическую модель, принадлежащую к первому типу Бианки, и вычислим локальную скорость рождения безмассовых конформно-ковариантных частиц $\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{d}{dt}\,(\sqrt{-g}\,n)$ во втором порядке по величине анизотропии (т. е. в первом порядке по малому отношению $\frac{C_{iklm}C^{iklm}}{R_{iklm}R^{iklm}}$, где C_{iklm} – конформный тензор Вейля). Метрика пространства-времени имеет вид[1])

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[(1 + h_1(t))dx_1^2 + (1 + h_2(t))dx_2^2 + (1 + h_3(t)dx_3^2], \tag{1}$$

где $|h_a| << 1$, $\sum_{a=1}^{3} h_a = 0$. Вводя, согласно [1], переменную $\eta = \int \frac{dt}{a(t)}$ и, в случае рождения скалярных частиц, полевую функцию $\chi = \phi/a$, для пространственной фурье-компоненты χ получаем уравнение (в первом порядке по h_a):

$$\chi_k'' + k^2 \chi_k = V_k(\eta)\chi_k, \tag{2}$$

где $V_k(\eta) = \sum_{a=1}^{3} h_a(\eta) k_a^2$, $k^2 = \sum_{a=1}^{3} k_a^2$; $\mathbf{k} = \{k_a\}$ – постоянный волновой вектор. Если при $t = -\infty$ ($\eta = -\infty$) состояние квантового поля было вакуумным, то $\chi_k = e^{-ik\eta}$ при $\eta \to -\infty$. Тогда (2) можно представить в виде интегрального уравнения:

$$\chi_k(\eta) = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\eta} \sin k(\eta - \eta_1) V_k(\eta_1) \chi_k(\eta_1) d\eta_1 + e^{-ik\eta}. \tag{3}$$

При $t \to +\infty$ ($\eta \to +\infty$), когда $h_a \to 0$, $\chi_k(\eta) = a_k e^{-ik\eta} + \beta_k e^{ik\eta}$, где $|a_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$. Тогда

$$a_k = 1 + \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta} V_k(\eta) \chi_k(\eta)\, d\eta, \tag{4}$$

$$\beta_k = -\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\eta} V_k(\eta) \chi_k(\eta)\, d\eta. \tag{5}$$

Полная плотность реальных рожденных частиц при $\eta \to +\infty$ связана с β_k формулой:

$$n = (2\pi)^{-3} a^{-3} \int d^3 k\, |\beta_k|^2. \tag{6}$$

---

[1]) Выбрана система единиц, где скорость света равна единице.

Решая (3) методом итераций и подставляя $\chi_k(\eta)$ в (5), находим, что во втором порядке по h_a при $\eta \to +\infty$:

$$n = \frac{1}{1920\pi a^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \sum_{a=1}^{3} (h_a'')^2 = \frac{1}{960\pi a^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, a^4 C_{iklm} C^{iklm} \tag{7}$$

(штрих означает дифференцирование по η). Поэтому локальная скорость рождения безмассовых скалярных частиц в метрике (1)[2]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d}{dt} (\sqrt{-g}\, n) = \frac{1}{960\pi} C_{iklm} C^{iklm} \geqslant 0 \tag{8}$$

Таким же способом можно показать, что аналогичная формула имеет место и в случае рождения фотонов и нейтрино. Отличие заключается только в том, что для нейтрино числовой коэффициент в правой части (8) равен $1/320\pi$, а для фотонов: $1/80\pi$.

Рассмотрим теперь рождение гравитонов в изотропной модели Фридмана ($h_a = 0$), когда к тому же отношение $R^2/R_{iklm}R^{iklm}$ мало (R – скалярная кривизна). Используя уравнение для гравитационных волн [2], которое приводится к виду:

$$\chi_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) \chi_k = 0,$$

и описанный выше метод, приходим к следующему результату:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d}{dt} (\sqrt{-g}\, n_g) = \frac{R^2}{288\pi} \geqslant 0. \tag{9}$$

При $R = 0$ и $C_{iklm} = 0$ гравитоны не рождаются – результат отмеченный Грищуком [3].

Заметим, однако, что в следующих порядках по малому параметру $\dfrac{C_{iklm}C^{iklm}}{R_{iklm}R^{iklm}}$ (или $R^2/R_{iklm}R^{iklm}$) плотность рожденных частиц $n(\eta = +\infty)$ не выражается через однократный интеграл по η от локальных величин, и поэтому локальные формулы (8 – 9) не обобщаются на высшие порядки теории возмущений.

---

[1] Результат (8) нетрудно также получить из формул, приведенных в приложении 1 работы [1].

Перейдем к случаю слабого неоднородного гравитационного поля. Пусть метрика пространства-времени имеет вид $g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$, где η_{ik}– метрика Минковского, $|h_{ik}| << 1$. Тогда полная вероятность рождения пары во втором порядке по h есть

$$W = < 0| S^{(1)} + S^{(1)} | 0 > = -2\,\mathrm{Re}[< 0 | S^{(2)} | 0 >], \tag{10}$$

где $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ – соответственные члены разложения S-матрицы по степеням h. Вычисляя S по теории возмущений, аналогично тому, как это было проделано в [4], приходим к результату:

$$W = \frac{a}{8\pi}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,[R_{ik}(q)(R^{ik}(q))^* - \frac{1}{3}|R(q)|^2]\,\theta(q^\circ)\,\theta(q^i q_i), \tag{11}$$

где коэффициент a равен 1/60 в случае безмассовых конформных скалярных частиц, 1/20 в случае нейтрино и 1/5 в случае фотонов (подробности расчета см. в [5]). За счет множителя $\theta(q^i q_i)$ интеграл в (11) в общем случае нельзя преобразовать в однократный интеграл по d^4x. Если, однако, при $R_{ik}(q) \neq 0$ выполняется условие $q^i q_i \geqslant 0$, то θ-функцию от $q^i q_i$ в (11) можно опустить, и тогда (с учетом известного факта, что инварианты $C_{iklm}C^{iklm}$ и $2(R_{ik}R^{ik} - \frac{1}{3}R^2)$ отличаются на полную производную) W приводится к виду: $W = \int w(x^i)\,d^4x$, где

$$w(x^i) = \frac{a}{32\pi}C_{iklm}C^{iklm} \tag{12}$$

что снова приводит к (8) в однородном случае.

В настоящее время, на фридмановской стадии эволюции Вселенной, нейтрино и фотоны не рождаются, а темп рождения гравитонов, как следует из (9), исчезающе мал: $\sim 10^{-106}$ $см^{-3}$ $сек^{-1}$. Вблизи сингулярности $\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{d}{dt}(\sqrt{-g}\,n) \sim t^{-4}$, что дает $\frac{d\epsilon}{dt} \sim t^{-5}$, в соответствии с результатами [1]. Формула (8) применима и в случае массивных частиц при условии $\hbar^{-4}m^4 << |R_{iklm}R^{iklm}|$.

Институт прикладной математики
Академии Наук СССР

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 августа 1977 г.

Литература

[1] Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский. ЖЭТФ, 61, 2161, 1971.

[2] Е.М.Лифшиц. ЖЭТФ, 16, 587, 1946.

[3] Л.П.Грищук. ЖЭТФ, 67, 825, 1974.

[4] R.U. Sexl,, H.K.Urbantke. Phys. Rev., 179, 1247, 1969.

[5] А.А.Старобинский. Кандидатская диссертация, ИТФ АН СССР, Черноголовка, 1975.