Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.2, стр. 97 – 100 *20 июля 1980 г.*

САМОФОКУСИРОВКА ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ГЛУБОКОЙ ВОДЫ

Э.Инфельд

С помощью нелинейного уравнения Шредингера гиперболического типа которое часто используется для описания волн на поверхности глубокой воды, установлено существование новой области неустойчивости для плоских волн малой, но конечной амплитуды. Неустойчивая мода может распространяться в узком телесном угле около нормали к направлению распространения основной волны.

Огибающая волны малой амплитуды на поверхности глубокой воды удовлетворяет уравнению [1]

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \Phi + |\Phi|^2 \Phi = 0. \tag{1}$$

В этой статье мы рассмотрим вопрос об устойчивости огибающей плоской волны Φ, удовлетворяющей уравнению (1). Предполагая, что Φ зависит от x и является действительной, получаем первый интеграл уравнения (1)

$$\frac{1}{2}\Phi_{\circ x}^2 = B + \frac{1}{2}\Phi_\circ^2 - \frac{1}{4}\Phi_\circ^4, \tag{2}$$

где B – постоянная интегрирования. Предполагая амплитуду a малой, напишем

$$\Phi_\circ = 1 + a\cos(k_\circ x) + 0(a^2),$$

Это отвечает

$$B = -\frac{1}{4} + a^2 + 0(a^4),\; k_\circ^2 = 2 + 0(a^2).$$

Мы покажем, что учет конечности a приводит к новой неустойчивой моде, которая не появлялась в линейном приближении по a.

Рассматривая вариацию Φ около $\Phi_o = 1$, $B = -\frac{1}{4}$, и полагая $\Phi = 1 + \delta\Phi$,

$$\delta\Phi = \delta\Phi_1\, e^{i(\mathbf{x}\mathbf{k} + \omega t)} + \delta\Phi_2\, e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega^* t)},$$

получим в линейном приближении дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = -2\,(k_x^2 - 2\,k_y^2) + (k_x^2 - 2\,k_y^2)^2. \qquad (3)$$

Ограничимся теперь случаем длинных волн $k << 1$, для которого волны неустойчивы для $k = (k_x, k_y) = k(\cos\theta, \sin\theta)$

$$\theta < \tan^{-1}(1/\sqrt{2}) \approx 35^\circ$$

в первом квадранте. Для больших k область неустойчивости сужается. Недавние исследования улучшенного гиперболического нелинейного уравнения Шредингера подтверждают этот результат [2]. Он сохраняется также и при разложении полной системы уравнений для волн на поверхности воды с точностью до a^2, включительно [3]. Здесь мы предполагаем сначала решить задачу для любого a, а затем перейти к пределу малых a.

Если предположить, что ω и k малы, но одинакового порядка, так что членом k^4 в (3) можно пренебречь, а B (и, следовательно, a) произвольны в интервале

$$-\frac{1}{2} \leqslant B \leqslant 0,$$

то можно найти дисперсионное уравнение, обобщающее (3). Оно имеет вид (см. [4], где решена аналогичная проблема; суть дела состоит в том, что мы разлагаем ряд величин по k, но берем в качестве Φ_o точное решение уравнения (2)):

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^4 + D(\theta)\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \cos^2\theta + A(\theta)\cos^4\theta = 0,$$

$$D(\theta) = a_1(\theta) + b_1(\theta) + a_2 b_2,$$

$$A(\theta) = a_1 b_1,$$

$$a_1 = [2\,q^4\, B_1/B_2 H\,][1 + 8\,B_2^2 + \tan^2\theta\,(1 - q^2)/3q^4]$$

$$b_1 = [8\,(1 - q^2)^2\, B_2/B_1\, H\,][1 - 2\,B_1^2 \tan^2\theta/1 - q^2\,],$$

$$a_2 b_2 = -8\,(1 - x)^2\,(1 - q^2 - x)^2\,(1 - q^2)(2 - q^2)/B_1 B_2 H^2,$$

$$q^2 = 2\sqrt{1+4B} \;/\; \sqrt{1+4B}+1 < 1,$$

$$H = (1 - q^2 - x^2)(2 - q^2),$$

$$B_1 = x, \quad B_2 = 1 - (2 - q^2)\, x/2\,(1 - q^2),$$

$$x = E(q)/K(q).$$

(E и K — полные эллиптические интегралы).

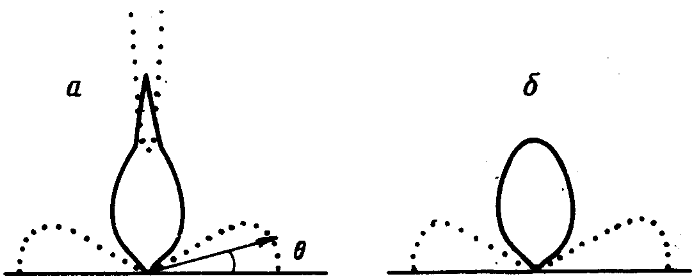
Если теперь нарисовать полярную диаграмму ω/k, то получится аналог диаграммы КМА, используемой в физике плазмы. [5], [6]. При $B \approx -0{,}25$ получается новая неустойчивая мода (рисунок), локализованная около $\pi/2$ (и $3\pi/2$). Аналогичные "почти перпендикулярные" неустойчивости известны в физике плазмы [7, 8]. Представляется вероятным, что обычное разложение дало бы нашу новую моду, если учесть члены порядка a^4. Это, однако, потребовало бы гораздо бо́льшей работы, чем при получении уравнения (4), которое включает все степени a^2.

Предварительные исследования указывают на то, что улучшенная, по сравнению с (1), модель [2] не должна существенно изменить наш результат, поскольку основные для него члены содержатся как в (1), так и в [2].

Для всех углов таких, что

$$(\cos\theta) > a$$

наша полярная диаграмма напоминает ту, которая получается при $a \to 0$ (рис. *б*)



Полярные диаграммы $\omega/k\,(\theta)$: *а* — $B = -0{,}2495$, $a = 0{,}011$; *б* — $B = -0{,}25$, $a \to 0$. Сплошная кривая — истинная кривая; пунктир — чисто мнимые значения ω/k

Итак мы показали, что в пределе малых a в дисперсионном уравнении

$$D(\omega, k, a) = 0$$

для волн на глубокой воде, описываемых гиперболическим нелинейным уравнением Шредингера, получается новая неустойчивость. Наш анализ ограничен малыми k и поэтому не дает максимального инкремента, для нахождения которого, по-видимому, потребуются численные расчеты.

Я хотел бы поблагодарить проф. В.Карпмана и др. А.Скорунского за обсуждение.

Институт ядерных исследований
Варшава

Поступила в редакцию
16 апреля 1980 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 9, 86, 1968.

[2] K.B.Dysthe. Proc. R. Soc. Lond., **A369**, 105, 1979.

[3] W.D.Hayes. Proc. R. Soc. Lond., **A332**, 199, 1973.

[4] E.Infeld, G.Rowlands, Zeit. for Phys. B in press 1980.

[5] P.C.Clemmow, R.F.Mullaly. Report on conference on the physics of the ionospere, Phys. Soc. London, 1955.

[6] E.Infeld, G.Rowlands. Proc. R. Soc. Lond., **A366**, 537, 1979.

[7] W.B.Thompson. An introduction to plasma physics, Pergamon, Oxford, 1962, p.216.

[8] S.Ichimaru. Basic principles of plasma physics, W.A.Benjamin, Reading, press 1973, p.149