

ВИНТОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Л.Е.Захаров

Показано, что при выполнении условия Крускала—Шафранова $nq > m$ в плазме конечной проводимости имеется винтовая неустойчивость с инкрементом бóльшим, чем у тиринг-моды.

Согласно современным теоретическим представлениям в плазме токамака основными крупномасштабными неустойчивостями являются винтовая мода, которая описывается идеальной гидродинамикой и тиринг-мода, являющаяся проявлением винтовой при наличии резонансной поверхности в плазме. Ниже будет показано, что имеется еще одна винтовая мода, которая не сводится к упомянутым неустойчивостям и, в частности, имеет инкремент бóльший, чем у тиринг-моды.

Рассмотрим цилиндрический плазменный шнур радиуса a с однородным током и проводимостью σ , находящийся внутри кожуха радиуса b . Между плазмой и кожухом имеется область нулевой проводимости. Такая модель, допускающая точное исследование устойчивости, была предложена в работах [1, 2], где приведены основные соотношения и написано полное дисперсионное уравнение для возмущений типа $\vec{\xi} = \vec{\xi}(r)e^{im\theta + ikz + \gamma t}$. Нашей задачей, в отличие от работы [2], будет исследование этого соотношения в случае большой проводимости. Будем считать, что величина $ka = a/R$ $n \ll 1$ (R — большой радиус эквивалентного тора).

Дисперсионное уравнение работы [2] удобно рассматривать, как равенство нулю определителя третьего порядка, столбцы которого имеют вид

$$\left(\frac{2}{g\beta_i} - 1 - \beta_i \frac{\Gamma^2}{2g} \right) \left(\frac{ka}{m} \sqrt{1 - \beta_i^2} \frac{\phi_i'}{\phi_i} + \beta_i \right),$$

$$1 - \beta_i^2 + \lambda \left(\frac{ka}{m} \sqrt{1 - \beta_i^2} \frac{\phi_i'}{\phi_i} + \beta_i \right) \quad (1)$$

$$\frac{2}{g\beta_i} - \frac{2\beta_i}{g} + \lambda \left(\frac{ka}{m} \sqrt{1 - \beta_i^2} \frac{\phi_i'}{\phi_i} + \beta_i \right), \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь $g = m + ka \frac{B_s}{B_\theta} = m - nq(a)$, q — запас устойчивости токамака,

$\lambda = (b^{2m} + a^{2m}) / (b^{2m} - a^{2m})$, Γ — инкремент, нормированный на альфе-

новскую частоту по полю тока $\Gamma^2 = \gamma^2 \frac{4\pi\rho a^2}{B_\theta^2(a)} = \frac{\gamma^2}{\omega_o^2} \cdot \phi_i = I_m(ka\sqrt{1 - \beta_i^2}) -$

функции Бесселя мнимого аргумента. Величины $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, отличающие столбцы, являются решениями кубического уравнения:

$$\frac{1}{\Gamma\omega_o\tau} \beta^3 + \left(1 + \frac{g^2}{\Gamma^2}\right)\beta - \frac{2g}{\Gamma^2} = 0, \quad (2)$$

$$\tau = \frac{4\pi\sigma}{c^2k^2}$$

Нас интересует случай $\omega_o\tau \gg 1$ (для токамака это величина масштаба 10^6). Если $g \neq 0$, то решения (2) в достаточном для нас приближении имеют вид

$$\beta_1 = \frac{2g}{\Gamma^2 + g^2} \sim 1, \quad \beta_2 = -il - \frac{\beta_1}{2}, \quad \beta_3 = -il - \frac{\beta_1}{2}, \quad (3)$$

$$l = |\sqrt{\omega_0 r (\Gamma + g^2/\Gamma)}| \gg 1.$$

Пользуясь масштабами величин β_1 и l , функции Бесселя можно упростить: $\frac{\phi_1'}{\phi_1} ka \sqrt{1 - \beta_1^2} = -1$, $\phi_{2,3}'/\phi_{2,3} = -1$. Столбцы с $i = 2$ и $i = 3$ являются комплексно сопряженными. Удобно заменить один из них мнимой, а другой — действительной частью. Кроме того сократим первый столбец на величину $(1 + \beta_1)$. Тогда, оставляя главные по l члены, получим дисперсионное уравнение.

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{g\beta_1} - 1 - \beta_1 \frac{\Gamma^2}{2g} & -l - l^2 \frac{\Gamma^2}{2g} \frac{ka}{m} & l^2 \frac{\Gamma^2}{2g} \\ 1 + \lambda - \beta_1 & 2l\beta_1 + \lambda l & l^2 \\ \frac{2}{g\beta_1} (1 - \beta_1) + \lambda & -\frac{2l}{g} + \lambda l & \lambda \frac{ka}{m} l \end{array} \quad (4)$$

Для гидромагнитных инкрементов, когда $\Gamma^2 \sim 1$, во втором столбце вклад в определитель дает только верхний член, а в третьем — два верхних. Дисперсионное соотношение сводится к занулению нижнего члена в первом столбце, который дает инкремент винтовой неустойчивости идеальной плазмы:

$$\Gamma^2 = g[2 - g(1 + \lambda)]. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь случай когда $l \frac{\Gamma^2}{2g} \sim 1$. Тогда верхние члены в первом $\left(\frac{2g}{\beta_1} - 1 = \frac{\Gamma^2}{g^2} \ll 1\right)$ и третьем столбцах малы по сравнению с остальными членами в этих столбцах, и дисперсионное уравнение сводится к занулению верхнего члена во втором столбце:

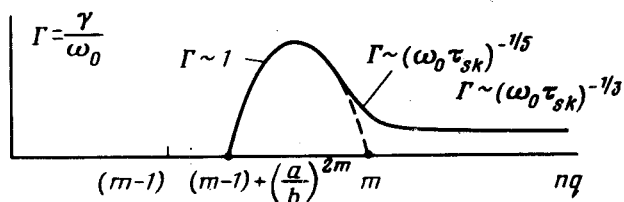
$$l \frac{\Gamma^2}{2g} \frac{ka}{m} + 1 = 0. \quad (6)$$

Инкремент Γ действителен при $g = m - nq < 0$, т. е. при выполнении условия Крускала — Шафранова. Величина инкремента γ равна

$$\gamma = \omega_0 \left(\frac{4m^2}{\omega_0 r_{sk}} \right)^{1/3}, \quad \omega_0^2 = \frac{B_\theta^2(a)}{4\pi \rho a^2}, \quad r_{sk} = \frac{4\pi \sigma a^2}{c^2}. \quad (7)$$

С учетом того, что согласно работе [2], при $g = 0$ $\gamma = \omega_0 \left(\frac{16m^2}{\omega_0 r_{sk}} \right)^{1/5}$,

диаграмма устойчивости отдельной винтовой гармоники в плазме с конечной проводимостью имеет вид:



Пунктиром показан инкремент моды при бесконечной проводимости.

Полученная здесь мода является проявлением винтовой неустойчивости в области $nq > m$, где идеальная мода стабилизирована возникающими при деформации плазмы поверхностными токами. Эти токи не находятся в равновесии в тангенциальном к границе плазмы направлении, в силу чего возникает инерционное течение в пограничном слое

толщиной $\frac{a^2}{Rq} (2m\omega_0 r_{sk})^{-1/5}$. Заметим, что кожух никак не влияет на

эту моду, даже если он совпадает с границей плазмы. Формальный парадокс здесь снимается, так как обычно закрепленность границы отождествляется с равенством нулю нормальной скорости плазмы $v_r = 0$. При наличии вакуумной прослойки предел $b \rightarrow a$ означает равенство нулю радиального компонента возмущения магнитного поля $B_r = 0$, что для плазмы конечной проводимости не сводится к условию $v_r = 0$.

Данная мода не связана с выбранной моделью распределения тока, и условием ее возникновения является просто выполнение критерия $nq > m$ на границе зоны, где протекает ток. Это, с нашей точки зрения, объясняет тот факт, что в токамаках реализуются пикированные распределения тока, так что практически весь ток течет в центральной области, где $q < 2$. Становится также понятным, почему меры, способствующие пикированию тока на начальной стадии, позволяют избежать МГД неустойчивостей при формировании разряда.

Автор благодарен В.Д.Шафранову за полезные советы при выполнении данной работы. †

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
14 мая 1980 г.

Литература

- [1] R.J.Taylor. AERE T/R, 2787; Rev. Mod. Phys., 32, 907, 1960.
[2] С.Н.Бреус. ЖТФ, XXX, 1037, 1960.