Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.2, стр. 182 – 186 *20 июля 1980 г.*

СКРЫТАЯ СИММЕТРИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А.А.Белавин

В статье сформулирован принцип инвариантности относительно дискретной подгруппы группы Лоренца 1 + 1 мерного пространства, действующей независимо на состояния с разными импульсами.

Статья посвящена рассмотрению уравнений треугольников (или уравнений факторизации, или уравнений Янга – Бакстера). Они являются наиболее компактным закодированным выражением скрытой симметрии одномерных квантовых или классических интегрируемых систем [1 – 12], а также двумерных решеточных статистических моделей типа модели Бакстера [4 – 8], [10]. В статье сформулирован принцип инвариантности относительно дискретной подгруппы группы Лоренца

1 + 1 мерного пространства, действующей независимо на состояния частиц с разными импульсами. Показано, что следствием этой симметрии является выполнение уравнений треугольников для двухчастичной S-матрицы рассеяния частиц.

Впервые уравнения треугольников были получены Янгом [3] при рассмотрении n-частичной нерелятивистской задачи с δ-функционным взаимодействием, где они обеспечивают самосогласованность Бете-анзатца. Такие же уравнения возникли в релятивистской факторизованной теории рассеяния [9 – 11]; в статистических двумерных решеточных моделях типа модели Бакстера [4 – 10]. Уравнения треугольников (Янга—Бакстера) играют ключевую роль в квантовом методе обратной задачи рассеяния развитом Фаддеевым и др. [7, 8], а также связаны с классическими системами интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния [13]. Ниже мы выпишем уравнения треугольников, используя язык теории рассеяния, включающей N-различных сортов частиц:

$$
\begin{aligned}
&S_{i_1 i_2}^{k_1 k_2}(u_1-u_2)\, S_{k_1 i_3}^{j_1 k_3}(u_1-u_3)\, S_{k_2 k_3}^{j_2 j_3}(u_2-u_3) = \\
&= S_{i_2 i_3}^{k_2 k_3}(u_2-u_3)\, S_{i_1 k_3}^{k_1 j_3}(u_1-u_3)\, S_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(u_1-u_2).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь $S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u_1-u_2)$ – двухчастичная S-матрица; $i_a(j_a)$ – обозначают сорта начальных (конечных) частиц и принимают значения от единицы до N. По повторяющимся значкам k_a в (1) происходит суммирование от единицы до N. Величины u_a – быстроты трех сталкивающихся частиц, связанные с энергией (импульсом) соотношением $E = mchu$ ($p = mshu$). Любое нетривиальное решение уравнений (1) приводит к существованию интегрируемых систем. Вопрос состоит в том как обнаружить эти решения. Между тем, на первый взгляд представляется удивительным, что такие решения вообще существуют. Так как число уравнений в (1) равно N^6, т.е. на много превосходит число неизвестных функций N^4.

Уравнение (1) при равных быстротах частиц $u_1 = u_2 = u_3$, кроме тривиального решения $S^{12}(0) = 1$, имеет решение соответствующее полному отражению частиц $S^{12}(0) = P^{12}$, где $P_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \delta_{i_1}^{j_2}\delta_{i_2}^{j_1}$. Величина P^{12} не меняется при изотопических преобразованиях обеих частиц до и после рассеяния

$$
P_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = (G^{-1})_{i_1}^{i_1'}(G^{-1})_{i_2}^{i_2'}\, P_{i_1' i_2'}^{j_1' j_2'}\, G_{j_1'}^{j_1}\, G_{j_2'}^{j_2}, \tag{2}
$$

где G – любая матрица $N \times N$. Рассмотрим целочисленную решетку в комплексной плоскости быстрот $u_{\mathbf{k}} = k_1 + \tau k_2$, $\mathbf{k}\,(k_1 k_2)$ – целочисленный вектор на решетке, τ – комплексное число ($\mathrm{Im}\,\tau > 0$). Поставим в соответствие каждой точке решетки $\mathbf{k}$ матрицу $G_{\mathbf{k}}$ размера $N \times N$. Потребуем, чтобы $G_{\mathbf{k}}$ – образовывали представление (проективное) абелевой группы сдвигов по решетке, т.е. с точностью до множителя удовлетворяли соотношениям

$$G_{\mathbf{k}}\, G_{\mathbf{e}} = G_{\mathbf{k}+\mathbf{e}}\,;\; G_{\mathbf{k}}^{-1} = G_{-\mathbf{k}}\,;\; G_{\mathrm{o}} = 1. \tag{3}$$

С помощью матриц $G_{\mathbf{k}}$ можно построить решение (1) во всех точках решетки:

$$S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u_{\mathbf{k}}) = \left(G_{\mathbf{k}}^{-1}\right)_{i_1}^{i_1'} P_{i_1' i_2}^{j_1' j_2} \left(G_{\mathbf{k}}\right)_{j_1'}^{j_1}. \tag{4}$$

В силу групповых свойств (3) $G_{\mathbf{k}}$ имеет вид $G_{\mathbf{k}} = g^{k_1} h^{k_2}$. Здесь g и h – матрицы, отвечающие двум элементарным сдвигам. Из уравнения (3) вытекают перестановочные соотношения $gh = \omega hg$, (ω – числовой множитель), обеспечивающие независимость $G_{\mathbf{k}}$ от пути между началом координат и точкой $\mathbf{k}$. Теперь осталось восстановить аналитическую функцию $S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u)$ во всей плоскости. Из (4) видно, что

$$S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u_{\mathbf{k}}+1) = (g^{-1})_{i_1}^{i_1'} S_{i_1' i_2}^{j_1' j_2}(u_{\mathbf{k}})\, g_{j_1'}^{j_1} = g_{i_2}^{i_2'} S_{i_1 i_2'}^{j_1 j_2'} (g^{-1})_{j_2'}^{j_2},$$

$$S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u_{\mathbf{k}}+\tau) = \lambda (h^{-1})_{i_1}^{i_1'} S_{i_1' i_2}^{j_1' j_2}(u_{\mathbf{k}})\, h_{j_1'}^{j_1} = \lambda h_{i_2}^{i_2'} S_{i_1 i_2'}^{j_1 j_2'} (h^{-1})_{j_2'}^{j_2}. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы при произвольных u матрица $S^{12}(u)$ обладала теми же свойствами. Т.е. опуская индексы:

$$S^{12}(u+1) = g_1^{-1} S^{12}(u)\, g_1 = g_2 S^{12}(u)\, g_2^{-1}, \tag{6}$$

$$S^{12}(u+\tau) = \lambda \exp(2\pi i u)\, h_1^{-1} S^{12}(u)\, h_1 = \lambda \exp(2\pi i u)\, h_2\, S^{12}(u)\, h_2^{-1}. \tag{7}$$

Требование автоморфности (7) вместе с начальным условием однозначно определяет двухчастичную S-матрицу. Решение (7) можно найти разложением в ряд Фурье. Чтобы построенная таким образом $S^{12}(u)$ являлась решением (1) при всех u, матрицы g и h должны удовлетворять некоторым условиям, которые в общем случае не известны пока и будут ниже продемонстрированы на примере.

Вспомним теперь, что аргумент S-матрицы равен разности быстрот сталкивающихся частиц $u = u_1 - u_2$. Поэтому (7) обозначает требование инвариантности двухчастичной S-матрицы при дискретном лоренц-преобразовании одной из начальных и одной из конечных частиц, с быстротой, например u_1, сопровождаемом некоторой заменой этих частиц на частицы другого сорта (преобразование с g и h). Подчеркнем, что импульс и сорт второй из начальных и второй из конечных частиц при этом не меняются.

Рассмотрим теперь пример, который позволит осуществить описанную выше конструкцию явно. Возьмем в качестве g и h матрицы, для которых $g^N = h^N = 1$, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$. Их можно выбрать в виде

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \omega^2 & \\ & & & \ddots \omega^{N-1} \end{pmatrix}; \qquad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Далее удобно ввести полный набор матриц $N \times N$: $I_{\vec a} \equiv I_{a_1 a_2} = g^{a_1} h^{a_2}$; $a_{1,2} = 0, \ldots, N-1$. Тогда S-матрица с учетом вторых равенств в (6) и (7) ($Z_N \times Z_N$ — инвариантность) принимает вид

$$S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u) = \sum_{\vec a} W_{\vec a}(u)\,(I_{\vec a})_{i_1}^{j_1}\,(\bar I_{\vec a})_{i_2}^{j_2}. \tag{9}$$

Здесь черта — эрмитово сопряжение. Условия автоморфности (6), (7) и начальное условие после подстановки в них (9) принимает вид

$$W_{\vec a}(u+1) = \omega^{a_2} W_{\vec a}(u); \quad W_{\vec a}(u+\tau) = \lambda \exp(2\pi i u)\,\omega^{a_1} W_a(u), \tag{10}$$

$$W_{\vec a}(0) = 1. \tag{11}$$

Решение достигается разложением в ряд Фурье и имеет вид

$$W_{\vec a} = \Theta_{\vec a}(u+\eta) / \Theta_{\vec a}(\eta). \tag{12}$$

Здесь

$$\Theta_{\vec a}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\pi\left(m + \frac{\vec a_2}{N}\right)^2 \tau + 2\pi i\left(m + \frac{a_2}{N}\right)\left(u + \frac{a_1}{N}\right)\right].$$

Для $N = 2$ это решение совпадает с рассмотренным Бакстером [5, 6]. Таким же образом можно построить и рдугие решения, в том числе в виде Θ-функций нескольких переменных. Из примера, рассмотренного выше, можно увидеть, что (6) и (7) уменьшают число независимых уравнений в (1) до числа независимых функций. Доказательство того, что (12) является решением (1) при любых u будет опубликовано в другом месте.

Наиболее интересным является вопрос о многомерных интегрируемых системах (Янг — Миллс ?!). В пионерской работе Замолодчикова [12] рассмотрены трехмерные системы, обладающие свойствами аналогичными (1). В них роль частиц играют бесконечные релятивистские струны, испытывающие тройные столкновения в 2 + 1 мерном пространстве. Роль уравнений треугольников играют уравнения тетраэдров на амплитуды трехструнного столкновения $S^{123}(n_1, n_2, n_3)$. Амплитуды зависят лоренц-инвариантным образом от единичных векторов n_i — нормальных к мировым плоскостям распространения струн. Хотя число уравнений тетраэдров (8 тысяч) еще более превосходит число амплитуд S^{123}: тем не менее они имеют совместное решение [12]. Возможно, это чудо объясняется инвариантностью уравнений тетраэдров и автоморфностью $S^{123}(n_1 n_2 n_3)$ относительно действия некоторой дискретной подгруппы Лоренца 2 + 1 пространства.

В заключение я особенно хотел бы поблагодарить А.Замолодчикова и В.Фатеева за многочисленные обсуждения и сотрудничество. Я очень признателен И.Череднику и А.Михайлову за разъяснение мне очень интересных работ [14, 15]. В этих работах идея автоморфности относительно действия конечной дискретной группы была впервые применена при анализе проблемы редукций в уравнениях Захарова — Шабата. Мне также приятно поблагодарить за помощь и обсуждения Е.И.Рябову, Г.Бабуджяна, В.Гурария, С.Манакова, А.Полякова, М.Тетельмана и Г.Элиашберга.

Институт теоретической физики
им.Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5 июня 1980 г.

Литература

[1] H.Bethe. Z. f. Phys., 71, 205, 1931.

[2] L.Onsager. Phys. Rev., 65, 117, 1944.

[3] C.N.Yang. Phys. Rev., 168, 1920, 1968.

[4] R.J.Baxter. Ann. Phys. N. Y., 70, 193, 1972.

[5] R.J.Baxter. Ann. Phys., N.Y., 76, 1, 25, 48, 1973.

[6] R.J.Baxter. Phyl. Trans. Roy. Soc., 289, 315, 1978.

[7] Л.Д.Фаддеев, В.К.Склянин, Л.А.Тахтаджян. Препринт ЛОМИ Р-1-79, Ленинград, 1979.

[8] Л.Д.Фаддеев. Препринт ЛОМИ Р-2-79, Ленинград, 1979.

[9] A.B.Zamolodchikov, Al.B.Zamolodchikov. Ann. Phys., N.Y., 120, 253, 1979.

[10] A.B.Zamolodchikov. Sov. Sci. Rev.; Phys. Rev., 2, 1980.

[11] M.Karowski, G.Thun, T.Truong, P.Weisz. Phys. Lett., 67B, 321, 1977.

[12] А.Б.Замолодчиков. ЖЭТФ, 79, 641, 1980.

[13] Е.К.Склянин. Препринт ЛОМИ, Е-3-1979, Ленинград, 1979.

[14] А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 30, 443, 1979.

[15] А.В. Михайлов. Труды киевской конференции, сентябрь 1979, North Holl. P.C.