Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.2, стр. 187 — 192 *20 июля 1980 г.*

РЕДУКЦИИ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ. ГРУППА РЕДУКЦИЙ.

А.В. Михайлов

Изучение бесконечных групп редукций приводит к обобщению метода обратной задачи на случай, когда спектральный параметр λ лежит на произвольной алгебраической кривой. Намечена классификация интегрируемых моделей и их редукций. Построен новый нетривиальный пример интегрируемой модели связанный с группой тетраэдра.

В настоящее время известно большое количество нелинейных полевых моделей интегрируемых методом обратной задачи. Важной является проблема их классификации, которую, с нашей точки зрения, следует решать в терминах метода обратной задачи. Проблема по существу, сводится к описанию возможных "$L - A$-пар" и перечислению редукций в каждом "калибровочном классе". В предыдущих работах [1 — 3] было показано, что описание редукций тесно связано с изучением особой группы симметрии условий совместности и, следовательно, самих интегрируемых моделей (группы редукций). В этой работе после краткого введения (раздел 1) мы показываем , что изучение бесконечных групп редукций приводит к интересным обобщениям метода обратной задачи. Мы намечаем схему классификации интегрируемых моделей и в разделе 3 приводим пример новой интегрируемой полевой модели (12).

1. Рассмотрим пару линейных уравнений на матричную функцию ψ

$$L_1\psi = \psi_\xi - U_1\psi = 0, \quad L_2\psi = \psi_\eta - U_2\psi = 0, \tag{1}$$

где $U_{1,2}$ — матричные $N \times N$ функции от координат ξ , η и комплексного параметра λ. Условие их совместности

$$U_{1\eta} - U_{2\xi} + [U_1\, U_2] = 0 \quad (\text{при всех } \lambda) \tag{2}$$

приводит к нелинейной системе уравнений (см. [2, 4, 5]), которая поддается изучению при помощи метода обратной задачи.

Обозначим $\Psi(\lambda)$ множество фундаментальных решений пары уравнений (1) при фиксированном значении λ. Потребуем, чтобы на множестве $\Psi(\lambda)$ действовала группа симметрий устроенная следующим образом. Пусть $\hat{G}$ группа $N \times N$ матриц, вообще говоря, зависящих от ξ , η, λ и $\mathcal{G}$ дискретная группа дробнолинейных преобразований плоскости λ. Рассмотрим подгруппу G_R прямого произведения $\hat{G} \times \mathcal{G}$, т.е. G_R состоит из некоторых упорядоченных пар вида $(\hat{g}, g(\lambda))$, где $g \in \hat{G}$, $g(\lambda) \in \mathcal{G}$. Группа G_R действует на функциях $\psi(\lambda)$ следующим образом:

$$\psi(\lambda) \to \psi_1(\lambda) = \hat{g}\,\psi(g(\lambda)); \; \psi(\lambda) \in \Psi(\lambda), \; (\hat{g}, g(\lambda)) \in G_R , \tag{3}$$

а требование симметрии относительно G_R заключается в том, что $\psi_1(\lambda) \in \Psi(\lambda)$. При этом очевидно, что

$$\hat{g}^{-1} L_{1,2}(\lambda) \hat{g} = L_{1,2}(g(\lambda)) \tag{4}$$

и, следовательно, возникают ограничения на вид "потенциалов" $U_{1,2}$

$$\hat{g}^{-1} U_1(\lambda) \hat{g} - \hat{g}^{-1} \hat{g}_\xi = U_1(g(\lambda)),\ \hat{g}^{-1} U_2(\lambda) \hat{g} - \hat{g}^{-1} \hat{g}_\eta = U_2(g(\lambda)). \tag{5}$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что связи (5) совместны с уравнениями движения (2) при любых $\hat{g}$ и $g(\lambda)$. Отметим, что группу G_R можно расширить преобразованиями вида

$$\psi(\lambda) \to \hat{t}(\psi^u(t(\lambda)))^{-1} \in \psi(\lambda),\ \psi(\lambda) \to \hat{r}\,\bar{\psi}(r(\bar{\lambda})) \in \psi(\lambda) \tag{6}$$

$$\psi(\lambda) \to \hat{h}(\psi^+(h(\bar{\lambda})))^{-1} \in \psi(\lambda);\ t(\lambda),\ r(\bar{\lambda}),\ h(\bar{\lambda}) \in \mathcal{G},\ \hat{t},\ \hat{r},\ \hat{h} \in \hat{G},$$

которые также приводят к ограничениям на вид $U_{1,2}$ совместным с (2) (см. [2, 3]).

Иными словами, потребовав симметрию в задаче совместности (1) относительно группы G_R мы регулярным образом строим редукцию системы (2) к системе с существенно меньшим числом полей, но обладающей скрытой симметрией. Эта симметрия проявится, например, в переменных действие — угол, где она приводит к преобразованиям в пространстве "полей" и комплексным преобразованиям параметра λ. Отметим, что в релятивистски-инвариантных задачах параметру λ иногда можно придать смысл e^β (β — быстрота), аналогичная интерпретация имеется в квантовом варианте метода обратной задачи [6]. Связь группы G_R с группой калибровочных преобразований и некоторые примеры подробно описаны в [2]. Ниже, для простоты будем считать, что матрицы $\hat{g} \in \hat{G}$ не зависят от ξ, η, λ.

2. Рассмотрим такие преобразования из G_R, которые имеют вид $(I, \tilde{g}(\lambda))$, при этом $\tilde{g}(\lambda)$ образуют нормальную подгруппу $\mathcal{G}^1 \in \mathcal{G}$. Из (5) следует, что матрицы $U_{1,2}(\lambda)$ являются автоморфными функциями группы $\mathcal{G}^1$ и, поэтому, их достаточно определить в фундаментальной области $\Gamma^1 = C/\mathcal{G}^1$. Группа $\mathcal{G}^1$ отождествляет границы области Γ^1 и превращает ее в Риманову поверхность которую мы также будем обозначать Γ^1.

Естественным обобщением рациональной задачи является совместности [4, 5] являются задача в которой матричные функции $U_{1,2}$ мероморфны на Римановой поверхности Γ^1. Полюса этих функций лежат на орбитах $\{A_1, \ldots, A_k\}$ и $\{B_1, \ldots, B_e\}$ конечной группы $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}/\mathcal{G}^1$. Напомним, что орбитой A_1 точки a_1, называется множество точек $g(a_1)$, где $g(\lambda) \in \mathcal{G}_1$. Разложим матрицы $U_{1,2}(\xi, \eta, \lambda)$

$$U_{1,2}(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{k=1}^{M_{1,2}} U^k_{1,2}(\xi, \eta)\, f_k^{1,2}(\lambda) + U^\circ_{1,2}(\xi, \eta) \tag{7}$$

по базисам мероморфных на Γ^1 функций $f_k^{1,2}(\lambda)$ не имеющих других особенностей кроме полюсов в $\{A_1,\ldots,A_k\}$ и $\{B_1,\ldots,B_e\}$ соответственно. При действии $\mathcal{G}_1$ функции $f_k^{1,2}(\lambda)$ преобразуются следующим образом:

$$f_k^{1,2}(g(\lambda)) = \sum_{S=1}^{M_{1,2}} F_{ks}^{1,2}(g) f_s^{1,2}(\lambda). \tag{8}$$

Матрицы $F_{ks}^{1,2}(g)$ очевидным образом задают представление группы $\mathcal{G}_1$, которое зависит от орбит $\{A_1,\ldots,A_k\}$, $\{B_1,\ldots,B_e\}$ и выбора базиса $f_k^{1,2}$. Соотношение (5) с учетом (7) и (8) принимает вид

$$\hat{g}^{-1} U_{1,2}^k \hat{g} = \sum_{s=1}^{M_{1,2}} F_{ks}^{1,2}(g) U_{1,2}^s, \quad \hat{g}^{-1} U_{1,2}^{\circ} \hat{g} = U_{1,2}^{\circ}. \tag{9}$$

Рассмотрим преобразование группы G_R имеющие вид $(g^\vee, I)$, при этом $g^\vee$ образуют нормальную подгруппу $\hat{G}^1$ группы $\hat{G}$. Они сводятся к подобиям без изменения λ ($F_{k,s}^{1,2}(I) = \delta_{ks}$). Такие преобразования мы, будем называть преобразованиями первого рода

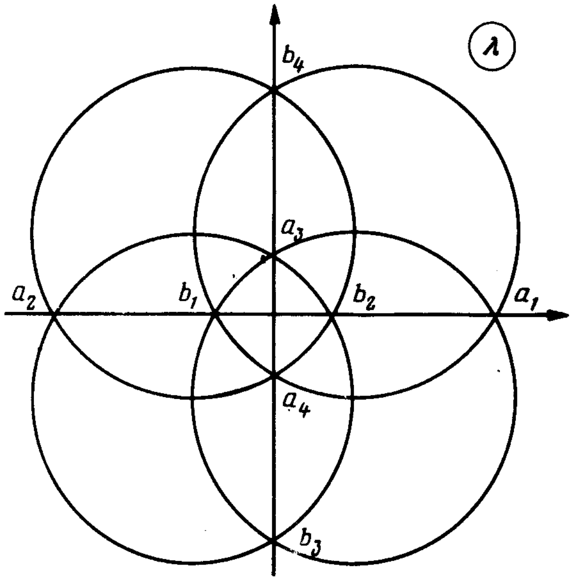
$$\hat{g}^{-1} U_{1,2}^k \hat{g} = U_{1,2}^k; \quad k \neq 0, \ \hat{g} \in \hat{G}^1. \tag{10}$$

Если $\hat{G}^1 = I$ или лежит в центре непредвидимого представления группы $\hat{G}$, то (10) не накладывает ограничений на вид $U_{1,2}^k$. Случай неприводимого $\hat{G}^1$ отвечает тривиальной редукции $U_{1,2}^k \equiv 0$. Факторгруппа $\hat{G}_1 = \hat{G}/\hat{G}^1$ связывает матрицы $U_{1,2}^k$ с разными k (преобразования второго рода). Редукции в которых нет преобразований первого рода будем называть каноническими редукциями.

Таким образом, аналитическая структура матриц $U_{1,2}$ определяется дискретной группой $\mathcal{G}$, ее подгруппой $\mathcal{G}^1$ и набором полюсов $\{A_1,\ldots,A_k\}$ и $\{B_1,\ldots,B_e\}$. Матричная структура классифицируется группами $\hat{G},\hat{G}^1$ и их представлениями.

3. Конечные группы дробнолинейных преобразований комплексной плоскости λ исчерпываются группами Z_N, D_N и группами правильных многогранников (тетраэдра, октаэдра, икосаэдра) [7]. Примеры редукций связанных с Z_N и D_N были рассмотрены в [2, 3]. Рассмотрим группу тетраэдра T, которая порождается двумя преобразованиями Q, J. Преобразование Q осуществляет вращение вершины на угол $2\pi/3$, а J связано с вращением на угол π вокруг оси проходящей через середины противоположенных ребер. Вписав тетраэдр в сферу Римана (см. стереографическую проекцию на рис.1). можно легко построить представление группы T дробнолинейными преобразованиями. Пусть группа $\hat{G}$ изоморфна T, а G_R является диагональю $\hat{G} \times \mathcal{G}$, т.е. порождена элементами (Q, q) и (J, j). Выберем матрицы представления $\hat{G}$ и $\mathcal{G}$ в следующем виде ($\omega = \exp(2\pi i/3)$)

$$j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i+1 & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1-i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad J = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2i & 2 \\ 2i & 1 & -2i \\ 2 & 2i & 1 \end{pmatrix}$$



Очевидно, что $\mathcal{G}^1 = \hat{G}^1 = I$ и, поэтому, нет условий первого рода (10). Рассмотрим две вырожденных орбиты A и B, соответствующие вершинам тетраэдра $\{a_1, \ldots, a_4\}$ и центрам противоположенных граней $\{b_1, \ldots, b_4\}$ (рисунок). Рациональные функции

$$f_k^1 = \frac{\lambda - b_k}{\lambda - a_k}, \quad f_k^2 = \frac{\lambda - a_k}{\lambda - b_k}; \quad k = 1, \ldots 4$$

возьмем в качестве базисов. Легко вычислить матрицы $F^{1,2}$:

$$F^{1,2}(q) = \begin{bmatrix} \omega^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^{\pm 1}(2 \pm \sqrt{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{\pm 1} \\ 0 & -\omega^{\pm 1}(2 \pm \sqrt{3}) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^{1,2}(j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(верхний знак отвечает F^1, нижний F^2). Из (9) немедленно следует, что $U^o_{1,2} = 0$ (следствие неприводимости представления группы T), а остальные четыре матрицы $U^k_{1,2}$ линейно выражаются через $U^1_{1,2}$ причем

$$U_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_3 \\ v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Условие (2) эквивалентно равенству нулю всех вычетов в точках a_i, b_i. Поскольку вычеты связаны преобразованиями из группы редукции достаточно занулить их в точке a_1 и b_1 :

$$u_{1\eta} + \frac{2}{3}(1+\sqrt{3})(v_3 - iv_2)v_1 = 0, \quad v_{1\xi} + \frac{2}{3}(1-\sqrt{3})(u_3 - iu_2)v_1 = 0 \quad (12)$$

(+ циклическая перестановка индексов 1, 2, 3)

Легко видеть, что $\partial_\eta(u_1 u_2 u_3) = 0$, $\partial_\xi(v_1 v_2 v_3) = 0$ следовательно имеется только четыре независимых уравнения на четыре комплексные функции. Пополнив группу T отражениями и, соответственно группу G_R преобразованиями вида (6) мы придем к четырем уравнениям на четыре вещественные функции.

Исходная система с четырьмя полюсами в каждом операторе приводила к 162 уравнениям на 180 вещественных функций. Фактически мы нашли нетривиальный анзатц в этой нелинейной системе и свели ее к четырем уравнениям первого порядка.

Пусть $\mathcal{G}$ — группа сдвигов $\lambda \to \lambda + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, $\left(\operatorname{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0\right)$, а $\hat{G}$ — произвольная конечная группа с двумя образующими $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2$ ($\hat{g}_1^{k_1} = \hat{g}_2^{k_2} = I$). Фундаментальная область Γ^1 эквивалентна тору и содержится в параллелограмме со сторонами ($k_1\omega_1$, $k_2\omega_2$). Если $U_{1,2}$ имеют простые несовпадающие полюса, то их можно разложить по ζ функциям Вейерштрасса:

$$U_a(\lambda, \xi, \eta) = \sum_{e,m} \zeta(\lambda - a_a - l\omega_1 - m\omega_2) U_a^{lm}(\xi, \eta) \quad (a = 1, 2),$$

где суммирование ведется по решетке содержащейся в Γ^1. Группа $\hat{G}^1$ совпадает с коммутантом $[\hat{G}, \hat{G}]$ и, следовательно, $\hat{G}_1$ — абелева. Если представление $\hat{G}$ неприводимо, то условия равенства нулю суммы вычетов ($\sum_{l,m} U_a^{lm} \approx 0$) выполнено автоматически, а нетривиальный (не центральный) коммутант приводит к условиям первого рода. Важный пример "эллиптической $L - A$-пары" нашли Боровик и Склянин [8].

Автор признателен А.А. Белавину за многократные обсуждения и живой интерес к этой проблеме [9]. Мне приятно поблагодарить В.Е.Захарова и С.П.Новикова за полезные обсуждения и стимулирующие дискуссии.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 июня 1980 г.

Литература

[1] А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 30, 443, 1979.

[2] A.V.Mikhailov. "Reduction problem and Inverse problem method". Proc. of Kiev Sovet – American meeting (Kiev, September, 1979). North Holland P.C. 1980.

[3] А.В.Михайлов. "О группе редукций двумеризованной цепочке Тода, и задаче Римана." Сб. "Труды семинара ИТЭФ по теории ядра". сентябрь – декабрь 1979 г., препринт ИТЭФ-44, 1980.

[4] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Функц. анализ и его прил., 13, 13, 1979.
[5] В.Е.Захаров, А.В.Михайлов. ЖЭТФ, 74, 1953, 1978.
[6] Л. Д.Фаддеев. Препринт ЛОМИ Р-2-79, 1979.
[7] Л.Р.Форд. Автоморфные функции. ОНТИ НКТП СССР, 1936, М.-Л.
[8] E.K.Sklyanin. Preprint LOMI E-3-1979, 1979.
[9] А.А.Белавин. Письма в ЖЭТФ, 32, 182, 1980.