Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.3, стр. 244 – 247 *5 августа 1980 г.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОПРОТИВЛЕНИЙ КОНЕЧНОЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ

В.И.Мельников

Для конечной неупорядоченной системы длиной x вычислены средние значения степеней сопротивления ρ и проводимости σ. При $x \gg l$ (l – длина свободного пробега) получено, что $\langle\rho^n\rangle \backsim \exp[(n^2+n)x/l]$, а $\langle\sigma^n\rangle \backsim \exp(-x/4l)$. Восстановлен вид функции распределения сопротивлений и показано, что логарифм сопротивления распределен по гауссову закону.

Одна из главных трудностей при теоретическом исследовании неупорядоченных систем (НС) состоит в необходимости усреднения физических величин по определенному набору случайных параметров, как, например, положениям примесей, величинам обменных интегралов и т.п. В некоторых случаях такое усреднение удается выполнить явно, причем полученный результат имеет непосредственный физический смысл в силу самоусредняемости изучаемой величины (например, плотности состояний и связанных с нею термодинамических характеристик). В более общем случае необходимо вычислять не среднее значение величины, а распределение вероятностей ее значений. Ясно, что характеризовать НС некоторым усредненным параметром допустимо только при условии, что его распределение имеет пренебрежимо малую ширину.

В работах [1, 2] были приведены доводы в пользу того, что распределение $W(\rho, x)$ сопротивлений ρ для НС длиной x (за единицу длины принята длина свободного пробега) не становится узким при $x \to \infty$. Непосредственной демонстрацией этого положения было вычисление $\langle\rho\rangle \backsim \exp(\alpha x)$ и $\langle\rho^2\rangle \backsim \exp(\beta x)$ $(\alpha, \beta \sim 1)$, в результате которого оказалось, что $\beta > 2\alpha$ [2]. Это показывает, что распределение $W(\rho, x)$ имеет пологий хвост в сторону больших ρ.

Наша цель состоит в явном нахождении $W(\rho, x)$ для одномерной НС с беспорядком в виде белого шума с использованием метода, разработанного Березинским [3]. Будет показано, в частности, что $\langle\rho^n\rangle \backsim \exp[(n^2+n)x]$, а величина $y = \ln\rho$ распределена гауссовским образом вблизи значения $y_0 = x$ с дисперсией $(2x)^{1/2}$.

Определим безразмерное сопротивление НС через ее коэффициент прозрачности T соотношением $\rho = 1/T$. Вводя коэффициент отражения $R = 1 - T$, свяжем $\langle\rho^n\rangle$ с $\langle R^m\rangle \equiv R_m$.

$$\langle\rho^n(x)\rangle = \langle(1-R(x))^{-n}\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} R_m(x) \approx \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty} m^{n-1} R_m(x)\,dm. \tag{1}$$

Здесь учтено, что при $x \gg 1$ основной вклад в сумму вносят $m \gg 1$. Величины $R_m(x)$ подчиняются уравнению [3]

$$\frac{dR_m}{dx} = m^2\,(R_{m+1} + R_{m-1} - 2R_m); \quad R_m(0) = \delta_{m0}. \tag{2}$$

Делая преобразование Лапласа по λ, получим

$$\lambda R_m - \delta_{m0} = m^2 (R_{m+1} + R_{m-1} - 2R_m), \tag{3}$$

где λ — параметр Лапласа. При $m >> 1$ это уравнение можно заменить дифференциальным, решения которого, как легко видеть, имеют степенной вид по m. После отбрасывания растущего с m решения и определения второй константы интегрирования из сравнения с решением при $m \sim 1$ (подробнее см. [4]), получим

$$R_m(\lambda) = \frac{\pi^{1/2}}{2\lambda} (4m)^{-q} \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(q+2)}{\Gamma(q+3/2)}; \; q = \sqrt{\lambda + 1/4} - 1/2. \tag{4}$$

При обратном преобразовании Лапласа следует учесть, что $R(\lambda)$ имеет полюс при $\lambda = 0$ и ветвление при $\lambda = -1/4$. В пределе $\ln m > x >> 1$ получим

$$R_m(x) = \frac{a}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma^3(a+1/2)}{(a-1/2)\,\Gamma(2a+1)} \left(\frac{m}{x}\right)^{1/2} \exp\left[-\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)x\right]; \quad a \equiv \frac{\ln m}{2x}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1), замечаем, что интеграл по a имеет перевал вблизи $a = n + 1/2$, так что

$$\langle \rho^n \rangle = \frac{1}{2^n (2n-1)!!} \exp[(n^2 + n)x]. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что распределение вероятностей, дающее моменты (6), есть

$$W(\rho, x) = \frac{aB(a+1/2, a+1/2)}{(\pi\rho x)^{1/2}} \exp\left[-\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)x\right]; \qquad a \equiv \frac{\ln\rho}{2x}, \tag{7}$$

где B — функция Эйлера. Отсюда следует, что величина $y = \ln\rho$ имеет гауссово распределение

$$W(y, x) = (4\pi x)^{-1/2} \exp[-(y - x)^2/4x] \tag{8}$$

с дисперсией $\overline{\Delta y} = (2x)^{1/2} << \overline{y} = x$.

Вычислим теперь для сравнения моменты проводимости $\langle \sigma^n \rangle \equiv \langle T^n \rangle$. Ввиду того, что $T = Z_0(x)$ (величина $Z_m(x)$ была ранее введена Березинским [3], см. также [4]), наша задача состоит в вычислении

$Z_0^{(n)}(x) \equiv \langle Z_0^n(x)\rangle$. По аналогии с [3] можно ввести

$$Z_m^{(n)} = \sum_{m_i} \left(\prod_{i=1}^{n} Z_{m_i}\right) \delta\left(\sum_{i=1}^{n} m_i - m\right). \tag{9}$$

Эти величины подчиняются следующей системе уравнений

$$\frac{dZ_m^{(n)}}{dx} = (m+n)^2 Z_{m+1}^{(n)} + m^2 Z_{m-1}^{(n)} - [(m+n)^2 + m^2 - n^2 + n] Z_m^{(n)},$$

$$Z_m^{(n)}(0) = \delta_{m0}. \tag{10}$$

Сделаем преобразование Лапласа по x и перейдем к дифференциальному уравнению, имея в виду случай $m \gg 1$, n. Тогда получим

$$\lambda Z_m^{(n)} - \delta_{m0} = (n^2 - n) Z_m^{(n)} + 2mn \frac{\partial Z_m^{(n)}}{\partial m} - m^2 \frac{\partial^2 Z_m^{(n)}}{\partial m^2}. \tag{11}$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$Z_m^{(n)}(\lambda) = f(\lambda)\, m^{-q}; \quad q = \frac{2n-1}{2} + \sqrt{\lambda + 1/4}. \tag{12}$$

Функция $f(\lambda)$ может быть найдена только путем решения (11) при $m \sim 1$. Для нас важно, что выражение (12) как функция λ имеет точку ветвления при $\lambda = -1/4$. Ясно, что это свойство сохранится и для $Z_0^{(n)}(\lambda)$, так что после обратного преобразования Лапласа главная зависимость $Z_0^{(n)}$ от x имеет вид $\exp(-x/4)$. Более тщательный расчет с использованием численных методов позволяет найти предэкспоненциальный множитель, так что окончательно

$$\langle \sigma^n(x)\rangle \equiv Z_0^{(n)}(x) = \frac{\pi^{5/2}}{2} C(n)\, x^{-3/2} \exp(-x/4). \tag{13}$$

Для n от 1 до 5 коэффициенты $C(n)$ имеют значения 1; 0,25; 0,14; 0,096; 0,072. Как видно, все моменты $\langle\sigma^n\rangle$ равны с точностью до численного предэкспоненциального множителя. Это означает, что основной вклад при усреднении вносит часть функции распределения коэффициента прозрачности, имеющая вид

$$w_1(T, x) = x^{-3/2} e^{-x/4} u(T), \tag{14}$$

где функция $u(T)$ не зависит от x. Полученный результат означает, по-видимому, что в НС длиной $x \gg 1$ вероятность пролета без рассеяния убывает как $\exp(-x/4)$.

Вообще говоря, распределения вероятностей величин $\sigma = T$ и $\rho = 1/T$ должны тривиальным образом выражаться друг через друга. Выполненный нами расчет показал, однако, что знание моментов $<\rho^n>$ и $<\sigma^n>$ дает возможность восстановить указанные функции только в тех областях переменных, которые вносят определяющий вклад в соответствующие моменты. Естественно, что эти области оказались различными для T и $1/T$.

В работе Андерсона и др. [1] было получено распределение вероятностей логарифма сопротивления (8) и с его использованием вычислена средняя проводимость $<\sigma>$, которая с экспоненциальной точностью оказалась независящей от длины НС. Наши результаты показывают, что выражения (7) и (8) по способу их вывода применимы только при $\rho \equiv \ln y \gtrsim \exp(2x)$ (при $\rho = \exp(2x)$ расположен перевал, определяющий нормировку функции (7)). При вычислении среднего от $\sigma = 1/\rho$ с использованием (7) видно, что интеграл сходится на $\rho \sim 1$, т.е. вне области применимости (7) и (8). Непосредственное вычисление $<\sigma^n(x)>$ дает результат (13), отличающийся в случае $n = 1$ от полученного в [1].

Значение моментов величин $1/T$ и T позволяет, таким образом, восстановить $W(1/T, x)$ в области $1/T \gtrsim \exp(2x)$ (выражение (7)) и $W(T, x)$ в области $T \sim 1$ (выражение (14)).

Укажем теперь на возможные экспериментальные проявления рассмотренных эффектов. Эксперименты на изолированных одномерных НС пока неизвестны. В том случае, когда такие НС образуют квазиодномерный проводник, будут усредняться их проводимости, так что результирующая проводимость будет даваться выражением (13) при $n = 1$, умноженным на число НС. Другая возможность состоит в использовании квантово-оптической аналогии. Предположим, что изготовлена пластинка прозрачного материала со случайным распределением показателя преломления вдоль одного из направлений. При достаточной толщине эта пластинка будет практически полностью отражать свет в широкой полосе длин волн, а распределение коэффициента прохождения T для ансамбля пластинок, изготовленных в статистически тождественных условиях, должно определяться выражениями (7) (с заменой $\rho = 1/T$) и (14). Это означает, что с ростом толщины пластинок должно происходить относительное сужение распределения $\ln(1/T)$ и экспоненциально расти относительное среднеквадратичное отклонение величины $1/T$ в соответствии с тем, что $<1/T^2> \infty <1/T>^3$, как следует из (6) при $n = 1$ и $n = 2$.

Автор благодарен А. И. Ларкину и Э.И.Рашба за ряд полезных обсуждений.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 июня 1980 г.

Литература

[1] P.W.Anderson, D.J.Thouless, E.Abrahams, D.S.Fisher. Preprint, 1980.

[2] E.Abrahams, M.J.Stephen. Preprint, 1980.

[3] В.Л.Березинский. ЖЭТФ, 65, 1251, 1973.

[4] В.И. Мельников. ФТТ, 22, вып.8, 1980.