Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.4, стр. 301 – 303 20 августа 1980 г.

N-СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА – МАКСВЕЛЛА

Г.А.Алексеев

Для того случая, когда метрика пространства-времени и 4-потенциал электромагнитного поля зависят только от двух координат, найдена L-A-пара, соответствующая уравнениям Эйнштейна – Максвелла, и построены N-солитонные решения.

Методы обратной задачи рассеяния, применяемые в [1, 2] для построения точных (солитонных) решений уравнений Эйнштейна в вакууме с метриками, зависящими только от двух координат, и допускающие обобщение на случай присутствия электромагнитного поля с инвариантом $F_{ik} F^{ik} = 0$ [3], оказываются применимыми и в общем случае наличия в пространстве гравитационного и электромагнитного полей, метрика и 4-потенциал которых имеют вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{ab}\, dx^a dx^b, \quad A_i = \{ 0, 0, A_a \}, \qquad (1)$$

где $\mu, \nu, \ldots = 0; 1$; $a, b, \ldots = 2, 3$; а функции $g_{\mu\nu}$, g_{ab} и A_a зависят только от x^μ и удовлетворяют уравнениям Эйнштейна – Максвелла без каких-либо дополнительных ограничений на вид этих полей.

Преобразованием координат x^μ (без участия x^a) можно привести $g_{\mu\nu}$ к конформно-плоскому виду $g_{\mu\nu} = -f\eta_{\mu\nu}$, где $f > 0$, а $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{const}$. Для стационарных осесимметричных полей в цилиндрических координатах $x^\mu = \{\rho, z\}$, $x^a = \{t, \phi\}$ следует положить $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, 1)$. Для полей, зависящих от времени и одной пространственной координаты, т.е. при $x^\mu = \{t, x\}$ и $x^a = \{y, z\}$ можно выбрать, например, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, 1)$.

Уравнения Эйнштейна – Максвелла (при $\gamma = c = 1$)

$$R_i^k = -2\left(F_{im}F^{km} - \frac{1}{4}\delta_i^k F_{em}F^{em}\right), \; \nabla_m F^{km} = 0, \; F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \qquad (2)$$

($R = 0$ для полей электровакуума) при учете (1) распадаются на две группы уравнений, давая замкнутую систему для g_{ab} и A_a и уравнения, определяющие f в квадратурах по найденным g_{ab} и A_a.

Замкнутая система уравнений для g_{ab} и A_a, получающаяся подстановкой (1) в (2), может быть записана в эквивалентной комплексной 3×3-матричной форме [1)]

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu U_\nu + \frac{i}{2a}\epsilon^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = 0, \quad \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu U_\nu = 0, \qquad (3)$$

---

1) При выводе уравнений (3) – (5) была использована комплексная самодуальная форма записи уравнений, найденная в [4]

$$\partial_\mu (G - 4 i \beta \Omega) = -2 (\Omega U_\mu - U_\mu^+ \Omega), \tag{4}$$

$$G U_\mu = -4 i \in a \epsilon_\mu{}^\nu \Omega U_\nu , \tag{5}$$

где " + " означает эрмитово сопряжение, $\in = \pm 1$ — знак, противоположный знаку детерминанта $\eta_{\mu\nu}$; $\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\epsilon_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\sigma} \epsilon^{\sigma\nu}$ (индексы $\mu, \nu, \ldots$ опускаются и поднимаются с помощью $\eta_{\mu\nu}$ и ей обратной $\eta^{\mu\nu}$); a — любое (неизотропное) решение уравнения $\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu a = 0$, а β — определяется по a : $\partial_\mu \beta = \in \epsilon_\mu{}^\nu \partial_\nu a$. Матрицы G и Ω имеют вид

$$G = \left(\begin{array}{c|c} -4 h^{ab} + 4 \Phi^a \overline{\Phi}^b & -2 \Phi^a \\ \hline -2 \overline{\Phi}^b & 1 \end{array}\right), \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $g_{ab} = - \in_{ac} h^{cd} \in_{db}$, $A_a = - \in_{ac} \operatorname{Re} \Phi^c$ и $\in_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что уравнения (3) в качестве неизвестных содержат только матрицы U_μ ($\mu = 0; 1$), уравнения (4) фактически служат для определения матрицы G через U_μ , а уравнения (5) будут далее играть роль дополнительных условий на выбор решений (3).

В связи с системой (3) рассмотрим линейную систему (аналог L-A-уравнений) для комплексной 3×3-матричной функции Ψ, содержащую дополнительный комплексный параметр λ:

$$D_\mu \Psi = \Lambda_\mu{}^\nu U_\nu \Psi , \tag{6}$$

где по аналогии с [1] операторы $D_\mu = \partial_\mu + P_\mu (\partial / \partial \lambda)$; функции $\Lambda_\mu{}^\nu$, P_μ и матрица Ψ зависят от x^μ и λ, а матрицы U_μ — только от x^μ. Если P_μ и $\Lambda_\mu{}^\nu$ выбрать в виде

$$P_\mu = - \left(a \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)^{-1} \partial_\mu (a F + \beta) , \quad \Lambda_\mu{}^\nu = \frac{i}{2a} \frac{\in F \delta_\mu^\nu + \epsilon_\mu{}^\nu}{(1 - \in F^2)} ,$$

где F — произвольная функция x^μ и λ, то операторы D_μ коммутируют и условия интегрируемости системы (6) совпадают с (3). Удобно $F(x^\mu, \lambda)$ выбрать так, чтобы $P_\mu = 0$. Для этого положим $aF + \beta = \lambda$.

Удивительно, что при введении естественным образом того же комплексного параметра λ уравнения (4) и антиэрмитовы части (5) можно представить в виде

$$D_\mu W + \Lambda_\mu{}^\nu (W U_\nu - U_\nu^+ W) = 0, \qquad W \equiv G + 4 i (w - \beta) \Omega ,$$

что эквивалентно условию $\Psi^+ W \Psi = K(w)$, в котором $K(w)$ — произвольная эрмитова матрица, зависящая только от $w \equiv aF + \beta$.

Снова следуя [1], введем вместо Ψ новую матричную переменную χ: $\Psi = \chi \mathring{\Psi}$, где $\mathring{\Psi}$ соответствует некоторому выбранному точному решению $\mathring{U}_\mu$, $\mathring{W}$. Тогда для χ получим

$$D_\mu \chi = \Lambda_\mu{}^\nu (U_\nu \chi - \chi \mathring{U}_\nu), \quad \chi^+ W \chi = \mathring{W}. \tag{7}$$

Кроме того, необходимо потребовать, чтобы χ была регулярной в окрестности $w = \infty$ и $\chi(\infty) = I$.

N-солитонным решениям соответствует мероморфная структура χ и χ^{-1} в плоскости w:

$$\chi = I + \sum_{l+1}^{N} \frac{R_l}{w - w_l}, \quad \chi^{-1} = I + \sum_{l=1}^{N} \frac{S_l}{w - \widetilde{w}_l}$$

Подстановка (8) в (7) дает следующие результаты: полюсы $\widetilde{w}_l$ ($l = 1, 2, \ldots, N$) комплексно сопряжены с w_l; матрицы R_l вырождены: $R_l = n_l \otimes m_l$; векторы m_l представляются в виде $m_l = k_l M_l$, где $M_l = \mathring{\Psi}^{-1}(w_l)$, а k_l (для каждого $l = 1, 2, \ldots, N$) – произвольные постоянные трехмерные комплексные векторы; векторы n_l определяются из алгебраической системы

$$\sum_{l=1}^{N} \Gamma_{kl}\, n_l = V_k \bar{m}_k, \quad \Gamma_{kl} = \frac{m_l V_k \bar{m}_k}{w_l - w_k}, \quad V_k = \mathring{W}^{-1}(\bar{w}_k).$$

Окончательно, для N-солитонных решений имеем

$$U_\mu = \mathring{U}_\mu + 2i\partial_\mu R, \quad G = \mathring{G} - 4i (R^+ \Omega + \Omega R), \quad R = \sum_{k=1}^{N} R_k.$$

Подстановка полученных решений в общем виде в дополнительные условия (5) обращает их в тождества. Следовательно, найденные решения удовлетворяют уравнениям Эйнштейна – Максвелла.

Автор благодарит В.А.Белинского за обсуждение результатов.

Математический институт
им. В. А.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 июля 1980 г.

Литература

[1] В.А.Белинский, В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 75, 1953, 1978.

[2] В.А.Белинский, В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 77, 3, 1979.

[3] В.А.Белинский. Письма в ЖЭТФ, 30, 32, 1979.

[4] W.Kinnersley. Jorn. Math. Phys., 18, 8, 1977.