Письма в ЖЭТФ, том 32, вып. 10, стр. 603 – 607 *20 ноября 1980 г.*

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УСИЛИВАЮЩЕГОСЯ ИМПУЛЬСА В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ

В. Е. Захаров

Построены уравнения обратной задачи, описывающие процесс распространения усиливающегося волнового импульса по среде с инверсной заселенностью. Найдено автомодельное решение, дающее представление о характере распространения такого импульса и предложена его интерпретация в терминах обратной задачи. Автомодельное решение описывает эффект сжатия усиливающегося импульса.

1. Распространение волнового импульса в двухуровневой среде без учета эффектов диссипации описывается уравнениями

$$E_t + E_x = 2i\rho; \qquad n_t = i(E\rho^* - E^*\rho); \qquad \rho_t = -2inE. \tag{1}$$

Здесь E – комплексная амплитуда волны, ρ, n – элементы матрицы плотности $\hat{\rho} = \begin{bmatrix} n & \rho \\ \rho^* & -n \end{bmatrix}$.

Из уравнений (1) следует

$$n^2 + |\rho|^2 = A^2(x). \tag{2}$$

$A(x) > 0$ — пространственная плотность взаимодействующих с волной атомов. В стационарном случае $\rho = 0$, и возможны две ситуации: $n = A(x)$, что соответствует инверсно заселенной среде, и $n = -A(x)$, что соответствует среде в нормальном состоянии. Если $n \to -A(x)$ при $t \to \pm\infty$, речь идет о задаче о самоиндуцированной прозрачности.

Нас будет интересовать случай

$$\begin{matrix} n \to A(x) & & n \to -A(x) \\ t \to -\infty & & t \to \infty \end{matrix}, \tag{3}$$

описывающий процесс, при котором происходит переход инверсно-заселенных атомов в нормальное состояние. Задача рассматривается на полуоси $0 < x < \infty$, при $x = 0$ задан падающий импульс

$$E(x, t)\big|_{x=0} = E_0(t). \tag{4}$$

Из уравнений (1) следует соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |E_0|^2 dt + 2\phi(x) \tag{5}$$

отражающее то очевидное обстоятельство, что импульс в процессе распространения усиливается, вбирая в себя энергию, ранее содержавшуюся в инверсно заселенных атомах.

Это усиление можно описать автомодельным решением

$$\begin{matrix} E = \phi(x)\epsilon(\xi) & & n = A(x)N(\xi) \\ \rho = A(x)R(\xi) & & \xi = \phi(x)(t - x - t_0) \end{matrix} \tag{6}$$

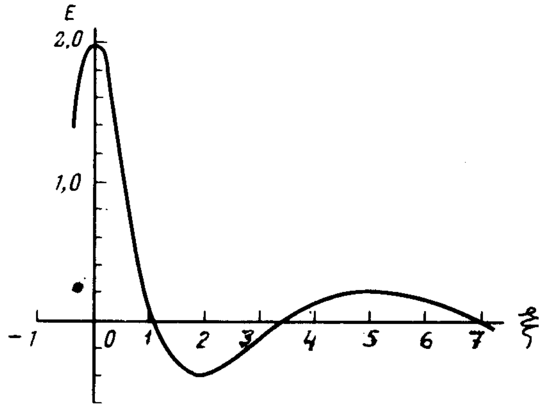
t_0 — произвольная константа.

Из (1) имеем

$$\begin{matrix} \xi\epsilon_\xi + \epsilon = 2iR & & N_\xi = i(\epsilon R^* - \epsilon^* R) \\ \int |\epsilon|^2 d\xi = 2 & & R_\xi = -2iN\epsilon \\ N(\infty) = -1 & & N^2 + |R|^2 = 1\,. \end{matrix} \tag{7}$$

Без ограничения общности можно считать поле ϵ вещественным, а $R = -iW$ чисто мнимым. Общее решение уравнений (7) имеет особенность при $\xi = 0$. Физические решения, не имеющие особенности, характеризуются параметром $\epsilon_0 = \epsilon|_{\xi=0}$, принимающим значения в пределах $0 < \epsilon_0 \leqslant 2$.

В предельном случае $\epsilon_0 = 2$, $W = 1$ решения является симметричным $\epsilon(-\xi) = \epsilon(\xi)$. График этого решения, вычисленный на ЭВМ, изображен на рис. 1. Во всех случаях уравнение (7) может быть сведено к уравнению Пенлеве типа 3.



Для однородной среды, когда $A = \text{const}$, суммарный поток энергии через данную точку пропорционален ее расстоянию от начала координат, а длительность импульса — обратно пропорциональна этому расстоянию. В присутствие малого затухания $\frac{\partial E}{\partial t} \to \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right)E$, автомодельное решение описывает начальную фазу $L << {}^{\gamma}/_{c}$ процесса формирования стационарного π-импульса, движущегося со световой скоростью.

2. К системе (1) уже применялся [1, 2] метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). Это применение основано на том, что система (1) есть условие коммутирования $[L, A] = 0$ двух операторов

$$L = \partial_t - i\,(I\lambda + H)$$
$$A = \partial x + i\left(\lambda I + H + \frac{\hat{\rho}}{\lambda}\right). \tag{8}$$

Здесь λ — спектральный параметр $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $H = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E^* & 0 \end{bmatrix}$. До сих пор, однако, рассматривался только случай самоиндуцированной прозрачности. Принятие граничных условий (3) приводит к ряду принципиально новых с точки зрения теории МОЗР явлений.

Определим функцию Иоста ψ-решение уравнения $L\psi = 0$, обладающее асимптотикой

$$\psi \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda t - i\left(\lambda x - \frac{\phi(x)}{\lambda}\right)} \qquad t \to +\infty$$

$$\psi \to \begin{pmatrix} a(\lambda, x)\, e^{i\lambda t} \\ b(\lambda, x)\, e^{-i\lambda t} \end{pmatrix} e^{-i\left(\lambda x - \frac{\phi(x)}{\lambda}\right)} \qquad t \to -\infty .$$

Из условия $A\psi = 0$ находим

$$a(\lambda, x) = a_0(\lambda)\, e^{\frac{-2i\phi(x)}{\lambda}}, \qquad b(\lambda, x) = b_0(\lambda)\, e^{2i\lambda x}.$$

Здесь $a(\lambda, x)$, $b(\lambda, x)$ – элементы матрицы перехода (см. [3]) $a_0(\lambda)$, $b_0(\lambda$ – их значения при $x = 0$, определяемые начальным импульсом $E_0(t)$. $a(\lambda, x)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости λ, возможно имеющая нули в точках $\lambda = \lambda_n$, $\operatorname{Im}\lambda_n > 0$. В стандартной теории рассеяния (см. [3]) функция $a(\lambda, x)$ непрерывна на вещественной оси λ, число нулей при этом конечно. В нашем случае $a(\lambda, x)$ имеет существенную особенность в точке $\lambda = 0$, которую можно рассматривать как нуль бесконечного порядка. При этом $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |E|\, dt > \infty$, хотя $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |E|^2 dt < \infty$.

Обратная задача рассеяния при наличии существенной особенности выглядит следующим образом. Уравнение Гельфанда – Левитана – Марченко имеет вид

$$K(t, y, x) = F^*(t + y, x) - \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t} K(t, s, x)F(s + s', x)F^*(s' + y, x)\,ds\,ds' \tag{9}$$

$$E(t, x) = 2iK(x, x, t).$$

Функция $F(t, x)$, определяющая решение, разбивается в сумму слагаемых $F = F_1 + F_2$. F_1 задается начальным импульсом

$$F_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\lambda, x)}{a(\lambda, x)} e^{-i\lambda t}\, d\lambda + \sum_n A_n e^{-i\lambda_n t + 2i\left(\lambda_n x + \frac{\phi(x)}{\lambda_n}\right)}. \tag{10}$$

Здесь A_n – константы, определяющие начальные положения солитонов.

Функция имеет вид

$$F_2 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{s(\lambda)}{a_0(\lambda)} e^{-i\lambda t + 2i\left(\lambda x + \frac{\phi(x)}{\lambda}\right)} d\lambda. \tag{11}$$

$s(\lambda) \not\equiv 0$ произвольная аналитическая в окрестности $\lambda = 0$ функция, такая, что уравнение (9) разрешимо. Интеграл в (11) берется по малой окружности с центром в точке $\lambda = 0$.

3. Система (1) имеет решения даже если $E_0(t) \equiv 0$. Эти решения можно назвать спонтанными. Для спонтанных решений $F_1 \equiv 0$. С оператором L связан бесконечный набор интегралов движения

$$\frac{\partial R_n}{\partial x} = \frac{\partial Q_n}{\partial t}.$$

Здесь R_n – полином от E, E^* и их производных по времени; $R_1 = |E|^2$. Можно показать, что для всех спонтанных решений

$$I_n = 0 \quad \text{при } n > 0 \qquad I_1 = 2\phi(x).$$

Автомодельное решение есть простейшее из спонтанных. Для него

$$F_2 = \frac{s_0}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{2\phi(x)}{t-x}}\ J_1(2\sqrt{2\phi(x)(t-x)})\,.$$

Здесь J_1 – функция Бесселя. Константа s_0 связана с параметром E_0 в решении (6), эта связь должна быть найдена из уравнения.

Существование спонтанных решений связано с физической неустойчивостью среды с инверсной заселенностью и означает математическую некорректность задачи (1 – 4). Спонтанные значения "вырастают" из малых флуктуаций, имеющих место при $t \to -\infty$. Задача (1 – 4) может быть сделана корректной, если предположить, что эти флуктуации отсутствуют. Проще всего доопределить задачу, если $E_0(t) \equiv 0$ при $t < t_1$, где t_1 – некоторый момент времени. Доопределечие состоит в требовании причинности (отсутствии сверхсветовых скоростей)

$$E(x, t) \equiv 0 \qquad \text{при } t < t_1 + x\,. \tag{12}$$

Коэффициент $b(\lambda)$ теперь становится аналитической функцией при $\mathrm{Im}\lambda > 0$.

Требование причинности (12) позволяет однозначно найти $s(\lambda)$. Именно, оказывается $s(\lambda) = ib(\lambda)$. При этом функция F задается формулой (10), где интегрирование проводится с обходом сверху особой точки $\lambda = 0$. Подобное явление рассматривалось в работе [4].

Можно показать, что автомодельное решение (6) является асимптотическим при $x \to \infty$ решением системы (1), при почти любой форме начального импульса.

В заключение автор благодарит И.Габитова, С.В.Манакова и А.В.Михайлова за полезные обсуждения, а также Л.Н.Щура за вычисления на ЭВМ.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 сентября 1980г.

Литература

[1] M.J. Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell. Journ Math. Phys., 15, 1852, 1974.

[2] D.J.Kaup. Phys. Rev. A16, 704, 1977.

[3] В. Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, 61, 118, 1971.

[4] D.J.Kaup, A.C.Newell. Advance in Math. 31, 67, 1979.