Письма в ЖЭТФ, том 32, вып. 11, стр. 632 – 635 *5 декабря 1980 г.*

КРАСНОЕ ПЯТНО ЮПИТЕРА И ДРЕЙФОВЫЙ СОЛИТОН В ПЛАЗМЕ

В.И.Петвиашвили

Выводится упрощенное уравнение волн Росби. Найдено решение этого уравнения в виде стационарного уединенного вихря, бегущего вдоль параллели со скоростью, бóльшей скорости Росби. Решение имеет сходство с Красным пятном Юпитера. Проводится сравнение полученного вихря с дрейфово-конвективными уединенными вихрями в неоднородной плазме.

Как известно красное пятно Юпитера представляет собой уединенный вихрь. Такие вихри, по-видимому, возникают из-за закручивания ветра силой Кориолиса и надолго сохраняют свою форму. Представляет интерес упрощенное математическое описание этого явления.

В работе [1] была выведена следующая система уравнений, описывающая волны во вращающейся атмосфере, глубина которой много меньше длины волны:

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -g\nabla h + \Omega[\mathrm{v}\vec{\zeta}]; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{dt} + \mathrm{v}\nabla; \tag{1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} H\mathrm{v} = 0; \quad \Omega = 2\omega_0 l; \quad l = \sin\alpha. \tag{2}$$

В этой модели атмосфера представляется как несжимаемая мелкая жидкость глубиной H, v – горизонтальная составляющая скорости. g – ускорение силы тяжести, ω_0 – угловая скорость вращения планеты, $\vec{\zeta}$ – единичный вектор вдоль вертикали. Все величины зависят только от горизонтальных координат: меридионального угла ϕ и широтного угла α.

Дисперсионное уравнение малых колебаний в этой системе имеет вид

$$\omega[1 + (kr_0/l)^2 - (\omega/\Omega)^2] = -k_\phi v_0/l^2. \tag{3}$$

$$r_0 = (gH_0)^{1/2}/2\omega_0 ; \quad v_0 = gH_0/2\omega_0 R. \tag{4}$$

H_0 – невозмущенная глубина, r_0 – длина Обухова, v_0 – скорость дрейфа Росби, вызванного неоднородностью Ω, k_ϕ – проекция волнового вектора на параллель, R – радиус планеты.

Уравнение (3) описывает две ветви. Ветвь пропорциональная правой части (3) соответствует волнам Росби. При частотах много больше Ω имеем гравитационные волны в мелкой воде. Выведем упрощенное уравнение, описывающее только волны Росби. Для этого предположим $|\Omega| >> |d/dt|$, что согласуется с параметрами Красного пятна. Тогда из (1) получаем разложение в ряд по степеням $1/\Omega$:

$$\mathrm{v} = 2\omega_0 r_0^2 [\vec{\zeta}\nabla h]/l - r_0^2 l^{-2}\nabla\partial h/\partial t - 2\omega_0 r_0^4 l^{-3}([\vec{\zeta}\nabla h]\nabla)\nabla h + \ldots;$$

$$h = H/H_0 - 1. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2) и опуская сравнительно малые члены получим искомое замкнутое уравнение относительно h:

$$\frac{\partial}{\partial t}(l^2 h - r_0^2 \Delta h) - \frac{v_0}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(h + h^2/2) = 2\omega_0 r_0^4 l^{-1}[\vec{\zeta}\nabla h]\nabla\Delta h;$$

$$H_0 << L << R \tag{6}$$

L – характерная длина возмущения.

Из (3), (6) явно видно, что волны Росби похожи на дрейфовые волны в плазме [2]. Сходство вызвано тем, что во вращающейся атмосфере и замагниченной плазме действуют близкие по свойствам силы: сила Кориолиса и сила Лоренца. Нужно еще учесть, что за невозмущенную высоту в (4) принимается высота однородной атмосферы, т.е. $H_0 = v_T^2/g$, где v_T – тепловая скорость частиц атмосферы. Тогда из (4) имеем: $r_0 = v_T/2\omega_0$, т.е. выражение радиуса Обухова совпадает с выражением радиуса Лармора ионов плазмы.

Уравнения, похожие на (6) были получены в ряде работ, но все они отличаются от (6) наличием членов второстепенной важности, или отсутствием нелинейности в последнем члене в первой части. В [2] эта нелинейность также опущена. Между тем, она в случае пятен Юпитера или антициклонов на Земле важнее нелинейности в правой части (6). Она в отсутствии дисперсии приводит к укручению и опрокидыванию вдоль параллели начального возмущения. Нелинейность в правой части (6) вызывает более сложное искажение, форма которого зависит от характерных размеров возмущения. В [2] было проведено исследование влияния этого члена на эволюцию волн в предположении, что он стохастизирует решение уравнения с течением времени, так что применим статистический подход. Было показано, что при размерах меньших размера Обухова, (который в иностранной литературе называется радиусом Росби) происходит перекачка энергии в более крупные масштабы, то есть возмущения сглаживаются. Однако представляется возможным, что нелинейности в (6) приводят к образованию структур в виде пятен и полос.

Для дрейфовых волн в работе [3] было найдено стационарное решение в виде солитона — уединенного вихря. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что и (6) имеет подобное решение: $h = f(\phi + ut/R, \alpha)$, где f удовлетворяет уравнению:

$$r_o^2 \Delta f = (l^2 - v_o/u) f - \frac{3}{2} \frac{v_o}{u} f^2 + c\,(f - ul^2/2v_o), \quad (7)$$

где c — произвольная функция. Для солитонного решения необходимо положить $c = 0$. Постоянная $-u/R$ есть угловая скорость перемещения солитона вдоль параллели.

Правая часть (6) вносит вклад в (7) из-за зависимости l от широты. Уравнение (7) легко решается, если размеры солитона много меньше R. Тогда в нулевом приближении l можно считать постоянной. В этом случае при $c = 0$ получаем хорошо известное солитонное решение, зависящее только от r — расстояния в горизонтальной плоскости до центра солитона. Зависимость l от широты можно учесть в следующем приближении как в методе ВКБ и тогда получим приближенное решение (7):

$$f = 1,6(r_o/Ll_o)^2 \left(\mathrm{ch}\left\{\frac{3}{4}\frac{r}{L}[1 + \xi(\alpha - \alpha_o)]\right\}\right)^{-4/3}, \quad (8)$$

$$\xi = (L/r_o)^2 \sin 2\alpha_o; \quad |\xi| < L/R; \quad L > r_o/l_o.$$

Здесь l_o — значение l на широте центра солитона α_o, L — радиус солитона. Учет зависимости коэффициента в (7) от широты приводит к овалообразности решения с вершиной в сторону экватора. Все величины в солитоне определяются характерным радиусом, зависящим от скорости распространения и широты центра солитона:

$$L = r_o/(l_o^2 - v_o/u)^{1/2}. \quad (9)$$

Чем больше u тем больше амплитуда и меньше размер вихря. Зная h, скорость вещества определяем из (5), откуда видно, что вращение вихря как и направление распространения направлено против вращения планеты. Как в антициклоне, давление в середине вихря больше чем на краях.

Недавно были получены хорошие данные пятен Юпитера [4], которые качественно согласуются с полученным решением. Параметры Юпитера примерно равны: $R = 7{,}1 \cdot 10^7$ м, $\omega_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ рад/сек, $r_0 = 2 \cdot 10^6$ м, $v_0 = 25$ м/сек. Для Земли имеем $r_0 = 900$ км, $v_0 = 40$ м/сек. При наличии слоя холодного воздуха у поверхности или по другим причинам, эти величины эффективно могут стать меньше. При учете этого обстоятельства, а также возможности сноса ветрами антициклоны на Земле имеют сходство с решением (8). Амплитуда солитона (8) устанавливается из условия равновесия между неучтенными здесь диссипацией и накачкой энергии за счет какой-либо слабой крупномасштабной неустойчивости в атмосфере. В лаборатории эти вихри легко реализовать на мелкой жидкости во вращающемся сосуде с параболическим профилем дна.

Решение (8) показывает, что для существования солитонов в атмосфере не нужно наличие градиента H_0, как это предполагалось в работе [5].

Основное отличие вихря (8) от дрейфовых солитонов в плазме [3] заключается в том, что в волнах Росби главным является градиент силы Кориолиса, а в дрейфовых солитонах – градиенты температуры и плотности плазмы.

Автор выражает благодарность Б.Б.Кадомцеву за стимулирующее обсуждение.

Институт атомной энергии
им. И.В. Курчатова

Поступила в редакцию
29 сентября 1980г.

После переработки
5 ноября 1980г.

Литература

[1] G.K Morikava, J.Meteorol., 17, 148, 1960.

[2] A.Haregawa, C.G.McLennan, Y.Kodama. Physics Fluids, 22, 2122, 1979.

[3] В. И. Петвиашвили. Физика плазмы, 3, 270, 1977.

[4] B.A.Smith, L.A.Soderblom, R.Beebe et al. Science, 206, 931, 1979.

[5] T.Maxworthy, L.G.Redekopp. Ikarus, 29, 261, 1976.