Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.11, стр. 673 – 677 *5 декабря 1980 г.*

РОЖДЕНИЕ БЕЗМАССОВЫХ ЧАСТИЦ КОНФОРМНО ПЛОСКИМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОЛЕМ

А.Д.Долгов

Показано, что глюонная аномалия в следе тензора энергии-импульса обеспечивает рождение безмассовых векторных бозонов в изотропном гравитационном поле.

Утверждение о невозможности рождения безмассовых частиц изотропным гравитационным полем впервые было сделано в работах [1, 2] и позже неоднократно повторялось в литературе (см., например, обзор [3]). Аргументация вкратце состоит в следующем. Предполагается, что безмассовые частицы описываются конформно инвариантной теорией. С другой стороны, метрика пространства-времени в обсуждаемом случае может быть переведена конформным преобразованием в метрику пространства Минковского, в котором рождение частиц не происходит. Отсюда и следует утверждение[1]. Явные вычисления [1 – 3, 5 – 7], проделанные для невзаимодействующих частиц, показали, что вероятность рождения в изотропных пространствах действительно исчезает в безмассовом пределе. Этот результат оказался справедливым [8] и для скалярных частиц с взаимодействием $\lambda\phi^4$. Однако, вообще говоря, учет взаимодействия между частицами может снять запрет на их рождение.

Цель настоящей статьи показать, что безмассовые частицы все-таки могут рождаться изотропным гравитационным полем. Дело в том, что несмотря на конформную инвариантность исходного лагранжиана элементарных частиц, квантовые поправки, связанные с петлевыми диаграммами, вообще говоря, нарушают конформную инвариантность теории. Последнее происходит из-за необходимости введения тяжелых регуляторных масс при вычислении расходящихся диаграмм. В частности благодаря этому возникает хорошо известная аномалия в следе тензора энергии-импульса частиц (в плоском пространстве):

$$T_{\mu\mu} = \sum_j \left(m_j^2 \, | \phi_j |^2 + \widetilde{m}_j \, \bar{\psi}\psi \right) + \frac{a}{8\pi} \, \beta G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu}, \qquad (1)$$

где ϕ_j – операторы квантовых бозонных полей с массой m_j; а ψ_j – фермионных, $G^a_{\mu\nu}$ – тензор напряженности векторных калибровочных полей, a – калибровочная константа связи. Коэффициент β зависит от вида теории. В частности для калибровочной теории, основанной на группе $SU(N)$ с N_f поколениями фермионов, $\beta = \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} N_f$.

Равенство (1) является исходным пунктом наших рассуждений. Существенно, что $T_{\mu\mu}$ не исчезает при $m = 0$.

Рассмотрим случай слабого гравитационного поля, когда метрика имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad (2)$$

где $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ – метрический тензор в пространстве Минковского, а отклонения от плоской метрики малы ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$). Амплитуда рождения гравитационным полем пары частиц с импульсами k_1 и k_2 равна

$$A(k_1 k_2) = \int d^4 x \, h_{\mu\nu} \langle k_1, k_2 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle . \qquad (3)$$

Рассмотрим изотропный случай, когда метрику можно выбрать в виде

$$h_{00} = 0, \quad h_{0i} = 0, \quad h_{ik} = h(t)\, \delta_{ik}. \qquad (4)$$

Причем мы примем, что $h(t \to \pm\infty) = 0$.

---

[1] Заметим, что волновое уравнение для гравитонов не конформно инвариантно, поэтому гравитоны могут рождаться в конформно плоском мире [4].

Для однородного пространства суммарный импульс рождающихся частиц должен быть равен нулю. Поэтому условие поперечности, $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$, приводит к исчезновению матричных элементов $T_{\mu 0}$. В силу этого для метрики (4) амплитуда рождения частиц пропорциональна следу $T_{\mu\mu}$. Если не учитывать последнего аномального слагаемого в формуле (1), то видно, что вероятность рождения массивных бозонов пропорциональна четвертой степени массы, в согласии с известными результатами. Последнее слагаемое в формуле (1), однако, показывает, что благодаря конформной аномалии поле (4) может рождать пары безмассовых векторных бозонов. Нетрудно вычислить плотность энергии рожденных векторных частиц:

$$\rho = \frac{1}{V} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{4 E_1 E_2 (2\pi)^6} (E_1 + E_2) \, | A(k_1, k_2) |^2 , \qquad (5)$$

где A определяется равенством (3), V — нормировочный трехмерный объем, а E_i и k_i — энергия и импульс рожденных частиц.

После небольшого вычисления получим (для $m_j = 0$):

$$\rho_0 = \frac{a^2 \beta^2 K}{2^7 \pi^2} \int_0^\infty d\omega \omega^5 | \tilde{h}(\omega) |^2 , \qquad (6)$$

где $\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt \, e^{i\omega t} h(t)$, и K — число типов частиц, для $SU(N)$ $K = N^2 - 1$.

Несмотря на то, что рождение калибровочных бозонов гравитационным полем происходит в высоком порядке по константе взаимодействия a, в отличие от массивных частиц, рождение которых возможно в нулевом порядке по a, тем не менее последние рождаются значительно слабее, даже если процесс происходит вблизи гравитационной сингулярности. Отношение плотности энергии (6) к плотности энергии массивных бозонов, рожденных тем же гравитационным полем в этом случае порядка

$$\rho_0 / \rho_m \approx \frac{a^2 \beta^2}{2^6 \pi^2} (m_P / m)^4 , \qquad (7)$$

где $m_P = 10^{19}$ ГэВ — планковская масса. Даже для сверхтяжелых бозонов с $m \approx 10^{15}$ ГэВ, рассматриваемых в схемах "великого объединения", это отношение порядка $10^{13} a^2 \beta^2 >> 1$. В частности, во фридмановской вселенной рождение частиц вблизи сингулярности должно происходить довольно эффективно.

Строго говоря, приведенные здесь формулы неверны вблизи гравитационной сингулярности, так как там может быть незаконно ограничение низшим порядком по гравитационному взаимодействию. Однако качественно результат о сильном рождении безмассовых векторных бозонов должен остаться в силе.

Заметим, что при описании взаимодействия скалярных частиц с гравитационным полем используют либо обычное уравнение Клейна — Гордона в криволинейных координатах

$$(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2)\phi = 0 \tag{8а}$$

либо конформно инвариантную модификацию этого уравнения

$$(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2 - \frac{1}{6}R)\phi = 0, \tag{8б}$$

где R – скалярная кривизна.

Первый случай отвечает выбору оператора тензора энергии-импульса в виде

$$T^{(0)}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\phi\,\partial_{0}\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left[(\partial_a\phi)^2 - m^2\phi^2\right]. \tag{9а}$$

Второй – добавлению к $T^{(0)}_{\mu\nu}$ полной производной

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T^{(0)}_{\mu\nu} + \frac{1}{6}(\eta_{\mu\nu}\partial_a\partial_a - \partial_{\mu}\partial_{\nu})\phi^2. \tag{9б}$$

Легко видеть

$$T^{(0)}_{\mu\mu} = 2m^2\phi^2 - (\partial_{\mu}\phi)^2, \quad \tilde{T}_{\mu\mu} = m^2\phi^2 \tag{10}$$

и во втором случае гравитационная вершина для изотропной метрики исчезает в безмассовом пределе, а в первом – нет. Это находится в соответствии с известными результатами о возможности рождения частиц в теории с уравнением (8а) и об отсутствии рождения для уравнения (8б).

Учет взаимодействия $\lambda\phi^4$, разумеется модифицирует и уравнения движения и тензор энергии-импульса, но условие (10) при этом не меняется. Этим и объясняется отсутствие рождения взаимодействующих частиц, которое указано в работе [8].

Заметим также, что с помощью формулы (5) легко воспроизводятся результаты работы [7] в пределе слабого поля для неизотропной метрики.

Я благодарен А.И.Вайнштейну, В.И.Захарову, Я.Б.Зельдовичу и А.А.Старобинскому за полезные обсуждения.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
23 октября 1980 г.

Литература

[1] К.А.Бронников, Э.А.Тагиров. Препринт Р2-4151, ОИЯИ, 1968.

[2] L.Parker. Phys. Rev. Lett., 21, 562, 1968; Phys. Rev., 183, 1057, 1969.

[3] L.Parker in "Asymptotic Structure of Spacetime", ed F.Esposito and L.Witten, Plenum, New York, 1977.

[4] Л.П.Грищук. ЖЭТФ, 67, 825, 1974.
[5] А.А.Гриб, С.Г.Мамаев. ЯФ, 10, 1276, 1979; 14, 800, 1971.
[6] L.Parker. Phys. Rev., D3, 346, 1977.
[7] Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский. ЖЭТФ, 61, 2161, 1971.
[8] L.Parker. Phys. Rev., D7, 976, 1973.