Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.11, стр. 681 – 684 *5 декабря 1980 г.*

О СПОНТАННОЙ КОМПАКТИФИКАЦИИ ПОДПРОСТРАНСТВА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛЕЙ ЭЙНШТЕЙНА С КАЛИБРОВОЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Д.В.Волков, В.И.Ткач

Найден, отличный от рассматриваемого ранее Шерком и Креммером, механизм компаутификации пространств при взаимодействии полей Эйнштейна с калибровочными полями.

При построении дуальных моделей с внутренними симметриями и лагранжианов для $O(N)$-расширенной супергравитации в настоящее время широко используется приближенный метод компактификации дополнительных пространственно-временных измерений [1 – 3]. Креммером и Шерком, а позже в более общем виде Лучиано [4] было показано, что при определенных условиях компактификация дополнительных измерений может быть следствием исходного лагранжиана, т.е. иметь спонтанный характер. В настоящей статье рассматривается механизм спонтанной компактификации подпространств, отличный от рассмотренного в работе [2].

Предполагая, что вакуумное состояние полей в подпространстве, подлежащем компактификации, определяется нулевыми значениями всех полей кроме полей Эйнштейна и калибровочных полей, рассмотрим соответствующий им лагранжиан:

$$L = a\sqrt{g}R + \beta\sqrt{g}\,F^{a\beta}_{lm}\,F^{a\beta\,lm}. \tag{1}$$

Индексы $l, m = 1, 2, \dots n$ и $a, \beta = 1, 2, \dots n$ относятся соответственно к пространственным и внутренним переменным. $(F^{a\beta})_{lm} = -(F^{\beta a})_{lm}$ – напряженности калибровочной $O(n)$ группы.

В зависимости от того, является ли рассматриваемое подпространство пространственно- или времени-подобным по отношению к сигнатуре метрического тензора полного пространства, в которое реальное пространство и время входят со своей обычной сигнатурой, отношение a/β больше или меньше нуля.

Уравнения для полей имеют обычный вид:

$$a\left(R_{lm} - \frac{1}{2}\,g_{lm}\,R\right) = -T_{lm}\,, \tag{2}$$

$$T_{lm} = \beta\left(F_{l\,s}^{a\beta}\;F_{m}^{a\beta\,s} - \frac{1}{4}g_{lm}\;F^{a\beta}_{ps} = F^{a\beta\,ps}\right) \tag{3}$$

и

$$(D_l\,F^{l}_{m})^{a\beta} = 0, \tag{4}$$

где D_l – означает ковариантную производную, содержащую как метрическую связность, определяемую символами Кристоффеля $\Gamma'^{\,l}_{mn}$ так и калибровочные поля.

Для нахождения нетривиального вакуумного решения потребуем, чтобы риманово пространство, определяемое уравнением (2) было пространством постоянной положительной кривизны, т.е.

$$R_{lm\,np} = K(g_{mn}\,g_{lp} - g_{ln}\,g_{mp}), \quad K > 0 \tag{5}$$

и чтобы калибровочные поля удовлетворяли дополнительному условию

$$(D_l\,F_{mn})^{a\beta} = 0, \tag{6}$$

при выполнении которого уравнения (4) тождественно удовлетворяются.

Уравнение (6) при учете (5) имеет следующее решение для напряженностей:

$$(F_{lm})^{a\beta} = -K(\chi_l^a \chi_m^\beta - \chi_m^a \chi_l^\beta), \tag{7}$$

и для калибровочных полей:

$$(A_m)^{a\beta} = -\chi^{a p} \Gamma^{s}_{mp} \chi^\beta_{s} + (\partial_m \chi^a_s) \chi^{s\beta}, \tag{8}$$

где χ^a_m – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$\chi_l^a \chi_m^a = g_{lm}, \quad g^{lm} \chi_l^a \chi_m^\beta = \delta_{a\beta}. \tag{9}$$

Соотношение (8) устанавливает связь калибровочной и метрической связностей.

При заданных функциях χ^a_m, что соответствует выбору определенной калибровки, выражения (7) – (8) являются инвариантами глобальной $O(n+1)$-группы, совпадающей с группой инвариантности метрики.

Подстановка напряженностей (7) в уравнение (2) при учете (3) приводит к следующему уравнению:

$$a(n-2)K = \beta(n-4)K^2, \tag{10}$$

определяющему зависимость гауссовой кривизны от отношения a/β. Уравнение (10) имеет при n неравном двум и четырем два решения $K = 0$, соответствующее тривиальному случаю плоского пространства и

$$K = \frac{a(n-2)}{\beta(n-4)}, \tag{11}$$

для пространства постоянной кривизны.

Таким образом, как следствие нелинейности уравнения (10), которое в определенном смысле аналогично уравнению для спонтанного нарушения симметрии хиггсовскими бозонами, лагранжиан (1) действительно содержит спонтанный переход с преобразованием плоского пространства в сферы.

Из соотношения (11) следует, что $a/\beta < 0$ при $n = 3$ и $a/\beta > 0$ при $n > 4$. Как следствие, компактификация может иметь место только, если подпространство является времениподобным для $n = 3$ и пространственноподобным для $n > 4$.

В заключение отметим, что проведенное выше рассмотрение без существенных изменений может быть обобщено на компактификацию в пространства, для которых

$$R_{lm;np,r} = 0 \tag{12}$$

т.е. на общий случай симметрических пространств [5]. При этом калибровочная группа для полей $F^{\alpha\beta}_{mn}$ должна совпадать с группой голономии симметрического пространства.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
30 октября 1980 г.

Литература

[1] E.Cremmer, J.Scherk. Nucl. Phys., B103, 399, 1976.

[2] E.Cremmer, J.Scherk. Nucl. Phys., B118, 61, 1977.

[3] E.Cremmer, B.Julia. Nucl. Phys., B159, 141, 1979.

[4] T.F.Luciani. Nucl. Phys., B135, 111, 1978.

[5] С.Хелгасан. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., 1964.