

Статистика собственных функций хаотических билиардов с учетом спин-орбитального взаимодействия Рашбы

Е. Н. Булгаков, А. Ф. Садреев

Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения РАН, 660036 Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 21 июля 2003 г.

После переработки 28 августа 2003 г.

Как аналитически, так и численно показано, что статистика собственных функций в хаотических билиардах со спин-орбитальным взаимодействием существенно зависит от соотношения квадрата константы спин-орбитального взаимодействия к энергии. Если это соотношение мало, одна компонента собственного состояния является случайным гауссовым полем, тогда как другая компонента является не универсальной и зависит от типа билиарда. В противоположном случае статистика обоих компонент описывается независимыми случайными комплексными гауссовыми полями с одинаковой дисперсией. В промежуточном случае обе компоненты собственного состояния не удовлетворяют гауссовой статистике.

PACS: 05.45.Mt, 05.60.Gg, 73.23.Ad

В типичных полупроводниковых III-V гетероструктурах электроны образуют двумерный электронный газ между слоями [1, 2]. При этом при гелиевых температурах длина когерентности достигает несколько микрон. Подбирая форму поверхностного электрода, можно запирает электроны в квантовом доте произвольной формы, который мы будем называть двумерным билиардом. Отличительной особенностью таких гетероструктур является спин-орбитальное взаимодействие (СОВ) Рашбы [3], с учетом которого гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + \hbar K [\sigma \times \mathbf{p}]_z, \quad (1)$$

где m^* – эффективная масса электрона. Константа СОВ K пропорциональна усредненному электрическому полю интерфейса $\langle E \rangle = \langle -(1/e)(dE_c/dz) + E_i \rangle$, где E_c – профиль зоны проводимости вдоль оси z , перпендикулярной плоскости интерфейса, E_i – электрическое поле между донорами примесями и двумерным электронным газом [4]. Типичные значения K равны $\hbar^2 K = (1 - 10) \cdot 10^{-7}$ мэВ · см [5–7]. Помимо СОВ Рашбы, существует дополнительный вклад в СОВ, обусловленный неоднородным потенциалом (потенциал конфинмента), образующим билиард [8, 9]. Однако если аппроксимировать потенциал конфинмента в виде жестких стенок (hard walls), этим вкладом в СОВ можно пренебречь [9].

Воспользуемся характерным масштабом – размером билиарда R и перепишем (1) в безразмерном виде

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} -\nabla^2 & \beta(-\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) \\ \beta(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) & -\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\beta = 2m^*KR$ и все координаты обезразмерены на R . Тогда уравнение Шредингера для компонент спина имеет вид

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \phi + \beta L \chi &= \epsilon \phi, \\ -\nabla^2 \chi + \beta L^+ \phi &= \epsilon \chi, \end{aligned} \quad (3)$$

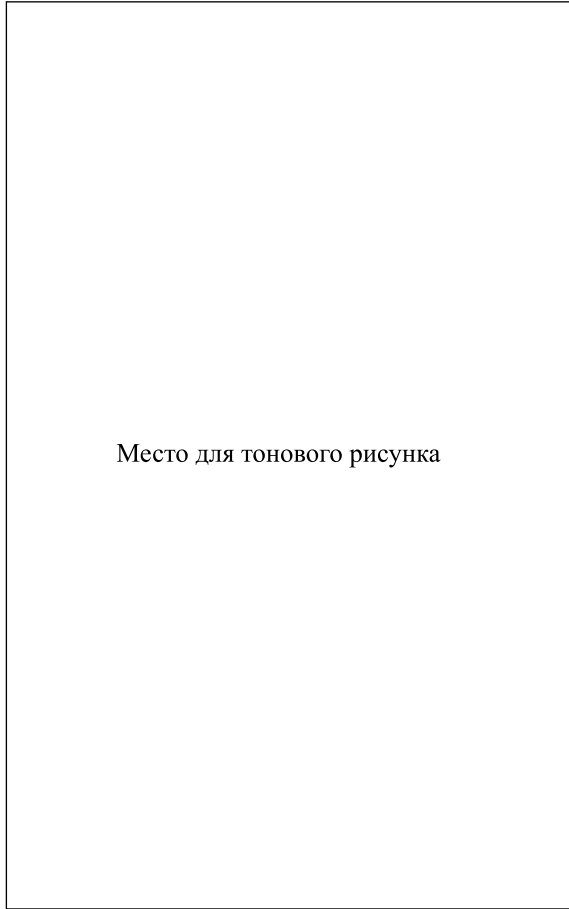
где оператор $L = -\partial/\partial x + i(\partial/\partial y)$. В отсутствие СОВ задача (3) исследована очень подробно (см., например, книгу Штокманна [10] или обзор [2]). Исторически МакДоннел и Кауфман были первыми [11], кто численно обнаружил, что сложная пространственная структура реальных собственных функций билиарда Бунимовича описывается распределением Гаусса. Статистика плотности вероятности (квадрата функции) описывается распределением Портера–Томаса [12]. Такая статистика многократно наблюдалась в микроволновых [10, 13] и акустических резонаторах [14].

В данной работе мы рассмотрим, что происходит со статистикой собственных двухкомпонентных функций, когда включается СОВ. Статистика уровней энергии прямоугольного билиарда, интегрируемость которого нарушается СОВ, рассматривалась Бергреном и Афтерлони [15]. В этой же работе была рассмотрена статистика нодальных точек собственных функций и было показано, что она совпадает со статистикой нодальных точек открытого хаотического билиарда. Для численного решения мы ис-

пользуем метод интегрирования по границе бильярда (boundary integral method) [16]. В качестве хаотического бильярда была взята кардиоида с границей, определяемой уравнением в декартовой системе координат [17]:

$$(x^2 + y^2 - \lambda^2)^2 = x^2 + y^2 + 2\lambda x + \lambda^2. \quad (4)$$

Также был рассмотрен стадион Бунимовича. Так как все результаты для последнего случая не отличаются от кардиоиды, мы приводим результаты лишь для кардиоиды. На рис.1 показаны компоненты спинора



Место для тонового рисунка

Рис.1. Пространственная структура первой компоненты $|\phi|$ (а) и второй компоненты $|\chi|$ (б) собственного спинора в кардиоиде с параметром $\lambda = 0.45$ для $\epsilon = 522.251$, $\beta = 0.25$. Параметр малости $\alpha = 0.005$

$|\phi|$ и $|\chi|$ для собственного уровня энергии $\epsilon = 522.251$ и $\beta = 0.25$. Как здесь, так и ниже параметр кардиоиды λ был выбран равным 0.45. Число граничных элементов было выбрано равным 1000. Заметим, что все состояния в закрытых бильярдах с СОВ являются двукратно вырожденными в силу теоремы Крамера. Поэтому второе вырожденное состояние имеет

точно такое же поведение, что и на рис.1, однако $|\phi|$ и $|\chi|$ меняются местами.

Обе компоненты демонстрируют хаотическое поведение, однако можно увидеть принципиальное различие в пространственном поведении. Оно состоит в том, что компонента $|\chi|$ является неоднородной по пространству, как видно из рис.1. Объяснение этому можно получить, если рассмотреть решения уравнения Шредингера (3) по теории возмущений. Для свободного двумерного электронного газа параметром малости СОВ является величина [8]

$$\alpha = \beta k / \epsilon = \beta / \sqrt{\epsilon}, \quad (5)$$

которой мы воспользуемся и в случае бильярда, где k – волновое число. Для малых α мы можем аппроксимировать решение (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi &= \psi_b + O(\alpha^2), \\ \chi &= \beta \left[\frac{1}{2}(x + iy)\psi_b + C\psi_b \right] = \\ &= \frac{\beta}{2} [(x - x_0) + i(y - y_0)]\psi_b, \end{aligned} \quad (6)$$

где ψ_b – собственная функция бильярда без СОВ: $-\nabla^2 \psi_b = \epsilon_b \psi_b$. На первый взгляд, постоянная C может быть найдена из условия нормировки $\int d^2 \mathbf{x} (|\phi|^2 + |\chi|^2) = 1$. Однако так как точность компонент пропорциональна константе СОВ, в условии нормировки остается лишь ψ_b , которая является уже нормированной. Поэтому в настоящей работе константа C (точнее константы x_0 и y_0) находилась подгонкой статистик (см. ниже).

Решение (6) непосредственно показывает, что вторая компонента $\chi(x, y)$ имеет свойство линейно нарастать в области бильярда, что хорошо видно из численного решения, показанного на рис.1. Далее из (6) следует, что, если ψ_b является случайным гауссовым полем (СГП), то первая компонента ϕ также является СГП, тогда как вторая компонента χ таковым не является. Так как СОВ приводит к тому, что каждая компонента собственного спинора становится комплексной, мы представим решение в виде

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}) \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) + iv(\mathbf{r}) \\ t(\mathbf{r}) + iw(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

На рис.2 представлены распределения всех четырех функций, которые показывают, что u и v действительно описываются СГП, тогда как статистика t и w существенно отличается от гауссовых распределений.

Для того чтобы аналитически вывести распределения для второй компоненты χ , представим ее ре-

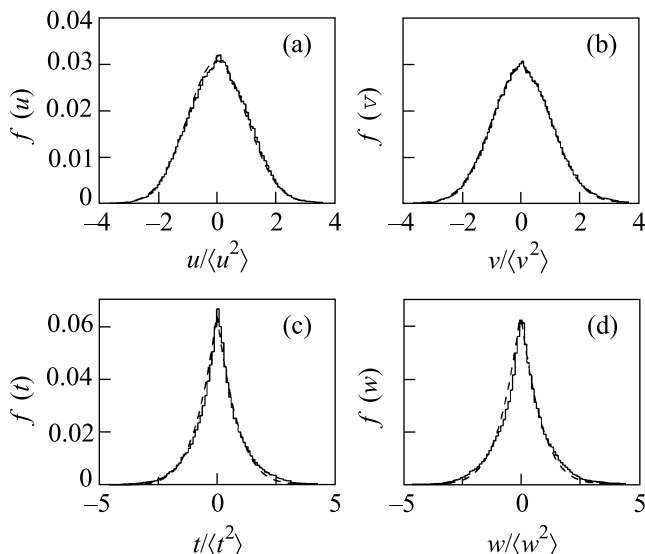


Рис.2. Распределения реальной и мнимой частей компонент спинора (7) для $\epsilon = 2509.7$, $\beta = 0.25$. Параметр малости $\alpha = 0.005$. Штриховой кривой на (a) и (b) показано распределение Гаусса (9). На рисунках (c) и (d) штриховая кривая означает распределение (10) для $x_0 = -0.3$, $y_0 = 0.4$

альную часть как $t(x, y) = (\beta/2)(x - x_0)\psi_b$, а мнимую часть как $w(x, y) = (\beta/2)(y - y_0)\psi_b$ согласно (6). Запишем функцию распределения t следующим образом:

$$f(t) = \langle \delta(t - t(x, y)) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \langle e^{i\mu(t - t(x, y))} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{1}{A} \int dx dy e^{i\mu(t - t(x, y))}, \quad (8)$$

где A – площадь билиарда. Допустим, собственная функция хаотического билиарда ψ_b является действительным СГП $u(x)$. Тогда, интегрируя (8) по гауссовому распределению

$$f(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{\langle u^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\langle u^2 \rangle}\right), \quad (9)$$

получаем в силу (6)

$$f(t) = \frac{1}{A} \int dx dy \exp\left\{-\frac{2t^2}{\beta^2(x - x_0)^2 \langle u^2 \rangle}\right\}. \quad (10)$$

Аналогичное выражение может быть получено для распределения мнимой части $f(w)$. Таким образом, для малых констант СОВ Рашбы β распределения для второй компоненты χ являются неуниверсальными,

так как зависят от конкретной формы хаотического билиарда. На рис.2 штриховой кривой показано распределение (10), полученное численным интегрированием при $\beta = 0.25$. Константы x_0 и y_0 были найдены подгонкой аналитических распределений (10) с численными. Результаты приведены в подписи к рис.2, которые совпадают с прямым вычислением константы C на основе численного решения уравнения (2).

Численно найденная матрица

$$K = \begin{pmatrix} \langle u^2 \rangle & \langle uv \rangle & \langle ut \rangle & \langle uw \rangle \\ \langle vu \rangle & \langle v^2 \rangle & \langle vt \rangle & \langle vw \rangle \\ \langle tu \rangle & \langle tv \rangle & \langle t^2 \rangle & \langle tw \rangle \\ \langle wu \rangle & \langle wv \rangle & \langle wt \rangle & \langle w^2 \rangle \end{pmatrix} = \quad (11)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.292 & 0.038 & -0.024 & -0.015 \\ 0.038 & 0.198 & -0.015 & 0.011 \\ -0.024 & -0.015 & 0.005 & 0 \\ -0.015 & 0.011 & 0 & 0.004 \end{pmatrix},$$

где $\langle F \rangle = \frac{1}{N} \sum_j F(j)$, N – число точек внутри билиарда, взятое в данных расчетах равным 200000, показывает, что вторая компонента сильно скоррелирована с первой. В численных расчетах мы полагали, что собственное состояние нормировано: $\sum_j (|\phi(j)|^2 + |\chi(j)|^2) = 1$.

На рис.3 представлены распределения реальных компонент u и t собственного спинорного состояния (7) для умеренной константы СОВ $\beta = 2$. Эти рас-

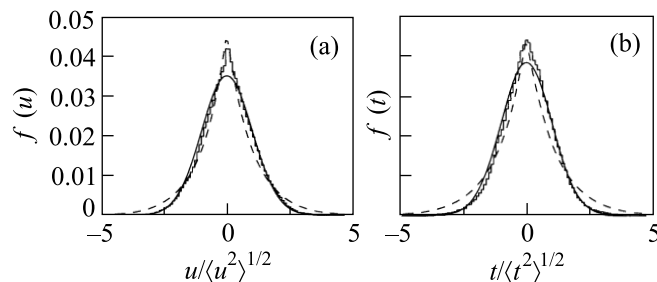


Рис.3. Распределения реальных частей собственного состояния в кардиоиде для $\epsilon = 2501.6$, $\beta = 2$. Соответствующий параметр малости СОВ $\alpha = 0.04$. Сплошной кривой показано гауссово распределение (9). Штриховой кривой показано распределение (10) для $x_0 = -0.050$

пределения показывают, что с ростом параметра малости α статистика остается гауссовой на больших значениях амплитуд волновых функций, которая дополняется неуниверсальной статистикой (10) на ма-

лых значениях амплитуд. Мнимые части v и w имеют точно такие же статистики, что и реальные части собственного состояния. Поэтому они не приведены на рис.3 (точно так же, как и на рис.4).

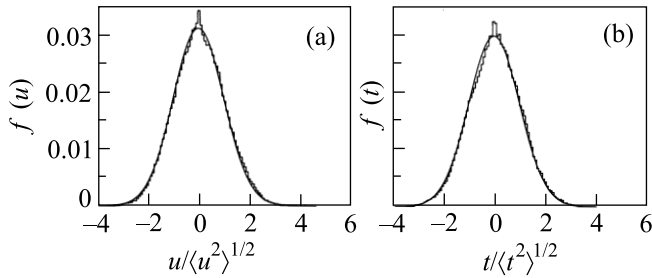


Рис.4. Распределения реальных частей собственного состояния в кардиоиде для $\epsilon = 2497.4$, $\beta = 10$, $\alpha = 0.2$. Сплошной кривой показано гауссово распределение (9)

В противоположном случае $\alpha \gg 1$ мы можем пренебречь операторами кинетической энергии в (3). Тогда, как не удивительно, уравнение Шредингера (3) вновь сводится к уравнению Лапласа для обоих компонент ϕ , χ :

$$L^+L \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = -\nabla^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \beta^2|\epsilon|^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (12)$$

с той лишь разницей, что теперь собственные значения равны $\beta^2\epsilon^2$. Следовательно, обе компоненты являются эквивалентными в том смысле, что являются СГП с одинаковыми дисперсиями. Численные решения для $\beta = 100$ полностью подтверждают этот вывод. Однако уже для $\beta \geq 10$ все четыре функции в собственном спиноре (7) практически являются СГП, как видно из рис.4.

Корреляционная матрица (11) была вычислена для $\epsilon = 2499.2$, $\beta = 10$, $\alpha = 0.2$:

$$K = \begin{pmatrix} 0.248 & -0.042 & 0.047 & 0 \\ -0.042 & 0.243 & 0 & 0.047 \\ 0.047 & 0 & 0.253 & 0.021 \\ 0 & 0.047 & 0.021 & 0.255 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

которая показывает, что все амплитуды становятся практически независимыми СГП с одинаковыми распределениями для $\beta \geq 10$.

Проведем оценки параметра малости α для квантовых дотов на основе полупроводниковой гетероструктуры GaSb/InAs/GaSb, для которого константа СОВ имеет рекордно большое значение: $\hbar^2K = 9 \cdot 10^{-7}$ мэВ · см, $m^* = 0.055m$ [5]. Подставляя эти

данные в константу СОВ $\beta = 2m^*KR = \hbar^2K/E_0R$, $E_0 = \hbar^2/2m^*R^2$, получаем, что лишь квантовые доты с размерами $R \sim 10$ нм, имеют $\beta \sim 10$, для которых, как показано на рис.4, все компоненты собственного спинора описываются СГП. При этом энергия Ферми электронов в доте не должна превышать 1 мэВ. Заметим, что $R \sim 10$ нм являются предельно достижимыми размерами, при которых движение электрона можно считать баллистическим. Для квантовых дотов с микронными размерами или меньше статистика собственных компонент спин-орбитальной задачи (1) описывается неуниверсальным распределением (10).

Работа была выполнена при содействии грантов Российского фонда фундаментальных исследований # 01-02-16077 и # 03-02-17039. Один из авторов признателен проф. Karl-Fredrik Berggren (Linköping University, Sweden) за обсуждение данной проблемы.

1. J. H. Davies, *The Physics of Low-Dimensional Semiconductors*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
2. Y. Alhassid, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 895 (2000).
3. Е. И. Рашба, *ФТТ* **2**, 1224 (1960).
4. E. A. de Andrada e Silva, G. C. La Rocca, and F. Bassani, *Phys. Rev.* **B55**, 16 293 (1997).
5. J. Luo, H. MuneKata, F. F. Fang, and P. J. Stiles, *Phys. Rev.* **B41**, 7685 (1990).
6. J. Nitta, T. Akasaki, H. Takaynagi, and T. Enoki, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1335 (1997).
7. J. P. Heida, B. J. van Wees, J. J. Kuipers et al., *Phys. Rev.* **B57**, 11 911 (1988).
8. A. V. Moroz and C. H. W. Barnes, *Phys. Rev.* **60**, 14272 (1999).
9. E. N. Bulgakov and A. F. Sadreev, *Phys. Rev.* **B66**, 075331 (2002).
10. H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos: An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
11. S. W. McDonald and A. N. Kaufmann, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1189 (1979); *Phys. Rev.* **A37**, 3067 (1988).
12. N. Rosenzweig and R. Thomas, *Phys. Rev.* **120**, 1698 (1960).
13. A. Kudrolli, V. Kidambi, and S. Sridhar, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 822 (1995).
14. K. Schaadt, *The Quantum Chaology of Acoustic Resonators*, M. Sci. Thesis, The Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, 1997.
15. K.-F. Berggren and T. Ouchterlony, *Found. of Phys.* **31**, 233 (2001).
16. R. J. Riddell, Jr., *J. Comp. Phys.* **31**, 21, 42 (1979).
17. M. Robnik, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 3971 (1983).