Письма в ЖЭТФ, том 78, вып. 7, с. 935 – 939

Поверхностное натяжение чистых изотопов жидкого гелия

А. М. Дюгаев[+*], *П. Д. Григорьев*[1)+△]

[+] *Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

[*] *Max-Planck-Institut for the Physics of Complex Systems, Dresden D-01187 Germany*

[△] *High Magnetic Field Laboratory, MPI-FRF and CNRS, BP166, Grenoble, F-38042, France*

Поступила в редакцию 4 сентября 2003 г.

Рассмотрены эффекты, связанные с неоднородностью пара над жидким гелием. Оба чистых изотопа имеют поверхностные уровни, заселенность которых растет при повышении температуры T. Мы выделили их вклад в температурную зависимость поверхностного натяжения $\sigma_3(T)$, $\sigma_4(T)$ и провели сравнение теории с результатами экспериментальных работ, выполненных в Японии [1 – 3]. Для жидкого He^3: $\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^\infty T^2$ при $0.2\,K < T < 1\,K$; $\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^0 T^2 \exp(-\Delta_3/T)$ при $T < 0.2\,K$, где $\Delta_3 \approx 0.25\,K$. Для жидкого He^4 при $T < 2\,K$: $\sigma_4(T) = \sigma_4(0) - AT^{7/3} - \alpha_4^0 T^2 \exp(-\Delta_4/T)$, где A – постоянная Аткинса, а $\Delta_4 \approx 4\,K$. Параметры α_3^0, α_3^∞, α_4^0 не зависят от свойств жидкости.

PACS: 67.55.–s, 73.20.Dx

1. В работах [1 – 4] проведено детальное экспериментальное исследование поверхностного натяжения чистых изотопов гелия. Для жидкого He^4 при $T < 1\,K$ имеет место закон Аткинса [1, 5]:

$$\sigma_4(T) = \sigma_4(0) - AT^{7/3}. \tag{1}$$

Для жидкого He^3, при $0.16\,K < T < 0.9\,K$, $\sigma_3(T)$ квадратично зависит от T [2]:

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^\infty T^2. \tag{2}$$

При низких $T < 0.16\,K$, согласно данным работы [3], $\sigma_3(T)$ не зависит от T, а экстраполяция закона (2) для $T = 0$ имеет точность $3 \cdot 10^{-3}$. Эти экспериментальные результаты оставались загадочными на протяжении 15 лет. Повышение точности эксперимента привело к обнаружению слабого максимума на температурной зависимости $\sigma_3(T)$ при $T \approx 0.1\,K$. Эффект этой немонотонной зависимости имеет порядок $3 \cdot 10^{-4}$ [4].

В настоящей работе построена теория поверхностного натяжения жидкого гелия в широком интервале температур, основанная на общем для обоих изотопов физическом принципе. Предполагается, что на границе раздела жидкость–пар существуют локализованные атомные состояния, которые мы будем условно называть состояниями тумана. Условность состоит в возможности отнести туман как к жидкости, так и к пару [6]. Существование тумана очевидно, по крайней мере, для жидкого He^4. В самом деле, объяснение немонотонной температурной зависимости поверхностного натяжения растворов изотопов гелия основано на выделении вклада связанных состояний атомов He^3 на поверхности жидкого He^4 (андреевские примесные уровни) [7]. Эффект связан с ван-дер-ваальсовским притяжением атома He^3 к жидкому He^4. Атом He^4 в 4/3 раз тяжелее атома He^3, поэтому, если существует поверхностный уровень для легкого атома He^3, он также существует и для тяжелого атома He^4. Статистика атомов здесь не играет роли, так как в первом приближении жидкий гелий является квантовой невырожденной жидкостью, а его поверхность не различает свои и чужие атомы [8, 9]. Отметим, что в отличие от ситуации, рассматриваемой в [7], энергия поверхностных уровней больше значения химического потенциала. По этой причине поверхностные уровни не заселены при $T = 0$. Существование поверхностных уровней подтверждается и анализом экспериментальных данных по подвижности электронов над жидким гелием. Имеется рассогласование теории и опыта в той области температур, где, как это кажется на первый взгляд, важны только эффекты рассеяния электронов на атомах пара [10].

2. Волновая функция предполагаемого поверхностного состояния имеет вид

$$\psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\rho}, z) = \varphi(z) \exp(i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}), \tag{3}$$

где координаты $\boldsymbol{\rho}, z$ отвечают движению атома вдоль и поперек поверхности жидкости. Граничное условие $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$ является естественным

[1)]e-mail: pashag@itp.ac.ru

свойством локализованного поверхностного состояния. Функции (3) отвечает спектр

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon^0 + \mathbf{k}^2/2M, \tag{4}$$

где M – эффективная масса атома, а ε^0 – энергия локализованного уровня. Для жидкого He^3 вклад состояний (3) в поверхностное натяжение $\sigma_3(T)$ определяется термодинамическим потенциалом $\Omega_3(\mu_3, T)$ [6]:

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) + \Omega_3(\mu_3, T), \tag{5}$$

$$\Omega_3(\mu_3, T) = -2T \int \ln\Big(1 + \exp\Big(\frac{\mu_3 - \varepsilon_3(k)}{T}\Big)\Big) \frac{d^2k}{(2\pi\hbar)^2},$$

где $\mu_3(T)$ – химический потенциал жидкого He^3. Из (4), (5) получаем выражение для Ω_3:

$$\Omega_3 = -T^2 \frac{M_3}{\pi\hbar^2} \int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\exp(x + \Delta_3/T) + 1}, \tag{6}$$

где Δ_3 – энергия уровня, отсчитанная от химического потенциала: $\Delta_3 \equiv \varepsilon_3^0 - \mu_3$. Параметр Δ_3 в (6) следует определять из сравнения теории и опыта. В первом приближении, пренебрегая температурной зависимостью Δ_3, имеем из (6) при $T \ll \Delta_3$

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - T^2 \exp\Big(-\frac{\Delta_3}{T}\Big)\alpha_3^0; \quad \alpha_3^0 = \frac{M_3}{\hbar^2\pi}. \tag{7}$$

Это выражение объясняет выход на константу в зависимости поверхностного натяжения от температуры при $T \ll \Delta_3 \approx 0.25\,\text{K}$, наблюдавшуюся в [3]. Если положить $M_3 = M_3^0$, где M_3^0 – масса атома He^3, получаем численное значение $\alpha_3^0 = 27.2$ мдин/см^2.

При $T \gg \Delta_3$ из (6) получаем

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - T^2\alpha_3^\infty; \quad \alpha_3^\infty = \alpha_3^0 \frac{\pi^2}{12}. \tag{8}$$

Численное значение $\alpha_3^\infty = 22.4$ согласуется с измеренной величиной $\alpha_3^\infty = 22.3$ [2]. Качественная зависимость σ от T, объясняющая опытные данные работ [2, 3], имеет вид

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^\infty T^2 \exp(-\Delta_3/T). \tag{9}$$

Оценка для $\Delta_3^0 \approx 0.25\,\text{K}$ получается из сравнения (7) с экспериментальными данными [3], а значение $\mu_3(0) = -2.5\,\text{K}$ определяет энергию связанного поверхностного состояния $\varepsilon_3^0 = \mu_3(0) + \Delta_3^0 \approx -2.25\,\text{K}$.

В следующем приближении нужно учесть зависимость параметра $\Delta_3^0 = \varepsilon_3^0 - \mu_3$ от T. Температурная зависимость химического потенциала $\mu_3 = \mu_3(T)$ определяется на основе точного выражения [6]

$$\mu = \bar{F} + P/n_L, \tag{10}$$

где $\bar{F}$ – свободная энергия на один атом, P – давление, n_L – плотность жидкости. Если температура не слишком высока, $P = n_v T$, где n_v – плотность пара. Так как $n_v \ll n_L$, то второй член в (10) мал и зависимость μ_3 от T можно найти на основе выражения [6]

$$\mu_3(T) = \mu_3(0) + \int\limits_0^T C_3(T_1)dT_1 - T \int\limits_0^T \frac{C_3(T_1)dT_1}{T_1}, \tag{11}$$

где $C_3(T)$ – теплоемкость на один атом He^3. Проведем, прежде всего, качественный анализ эффектов температурной зависимости $\Delta_3(T)$. При низких температурах $C_3(T) = T/T_F$, и из (11) получаем

$$\mu_3(T) = \mu_3(0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{T_F}, \tag{12}$$

где T_F – температура вырождения He^3: $T_F \cong 0.36\,\text{K}$ [11]. При высоких температурах, $T > T_F$, согласно теории квантовых невырожденных жидкостей [8, 9], главная температурная зависимость $\bar{F}$ определяется спиновой энтропией $S_\sigma = \ln 2$:

$$\mu_3(T) \approx \mu_3(0) - T\ln 2. \tag{13}$$

Температурную зависимость энергии $\varepsilon_3^0(T)$ можно оценить, рассмотрев неидеальность тумана в первом вириальном приближении:

$$\varepsilon_3^0(T) = \varepsilon_3^0(0) + V_3 n_3(T), \tag{14}$$

где V_3 – феноменологический потенциал взаимодействия атомов He^3, а значение плотности тумана $n_3(T)$ дается выражением

$$n_3(T) = 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi\hbar)^2} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{\varepsilon_3(k) - \mu_3}{T}) + 1}. \tag{15}$$

Из (4), (15) получаем

$$n_3(T) = \frac{M_3 T}{\pi\hbar^2} \ln\Big[1 + \exp\Big(-\frac{\Delta_3}{T}\Big)\Big]. \tag{16}$$

Из (11), (14), (16) следует уравнение на параметр $\Delta_3(T)$:

$$\Delta_3(T) = \Delta_3^0(T) + \lambda_3 T \ln\Big[1 + \exp\Big(-\frac{\Delta_3(T)}{T}\Big)\Big], \tag{17}$$

$$\Delta_3^0(T) = \varepsilon_3^0(0) - \mu(T), \quad \lambda_3 = V_3 \frac{M_3}{\pi\hbar^2}.$$

При высоких температурах $T > T_F$ на основе (13), (17) получаем

$$\Delta_3(T) \approx \Delta_3(0) + T \ \ln 2 + \lambda_3 T \ln\Big[1 + \exp\Big(-\frac{\Delta_3(T)}{T}\Big)\Big]. \quad (18)$$

С учетом малости $\Delta_3(0) \approx 0.25\,\text{K}$ из (18) следует, что $\Delta(T) \sim T$ независимо от знака взаимодействия V_3 при высоких $T > T_F$, а из (5), (6) видно, что $\sigma_3(T) - \sigma_3(0) \sim T^2$.

Итак, учет температурной зависимости параметра Δ_3 в (6) не противоречит имеющему место на опыте закону (2) при высоких $T > T_F$. Параметр $\Delta_3(0)$ находится по данным работ [2,3] очень точно, однако в определении λ_3 (17) и эффективной массы M_3 (6) есть неоднозначность, связанная с тем, что уже первое приближение $\Delta_3 = 0$, $M_3 = M_3^0$ имеет точность $3 \cdot 10^{-3}$. Далее мы ограничимся рассмотрением модели идеального тумана ($\lambda_3 = 0$) (17), а температурную зависимость $\mu_3(T)$ найдем точно на основе (11) и опытных данных для $C_3(T)$ [11]. Можно привести аналитическое выражение для $\Delta_3(T) = \Delta_3(0) - \mu_3(T)$, так как при $T < 2\,\text{K}$ данные [11] хорошо согласуются с зависимостью вида

$$C_3(T) = 0.2T + 0.105\frac{T}{T^2 + T_0^2}; \quad T_0 = 0.21\,\text{K}. \quad (19)$$

Теоретическое обоснование (19) дано в [9]. На основе (11), (19) определяется зависимость $\Delta_3 = \Delta_3(T)$:

$$\Delta_3(T) = 0.25 + 0.2T^2 + 0.5T\,\text{arctg}\frac{T}{T_0} - 0.053\ln\Big(1 + \frac{T^2}{T_0^2}\Big), \quad (20)$$

температура T определяется в K.

Численное интегрирование на основе (11) и данных [11] для $C_3(T)$ подтверждает (20) с точностью 10^{-2} при $T < 1.5\,\text{K}$, а сравнение (5), (6) с опытными данными для $\sigma_3(T)$ [2,3] дает значение эффективной массы $M_3 = 2.25 M_3^0$ в модели идеального тумана. С точностью $3 \cdot 10^{-4}$ при $T < 0.4\,\text{K}$ зависимость $\sigma_3 = \sigma_3(T)$ имеет вид (рис.1)

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^0 T^2 \int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\exp\Big(x + \dfrac{\Delta_3}{T}\Big) + 1}, \quad (21)$$

где $\sigma_3(0) = 155.3\,\text{мдин/см}$ и $\alpha_3^0 = 61.2\,\text{мдин/см} \cdot \text{K}^2$.

В более широком интервале $T < 2\,\text{K}$ температурная зависимость $\sigma_3(T)$ (21), (20) приведена на рис.2, где представлены и экспериментальные данные работ [2,3].

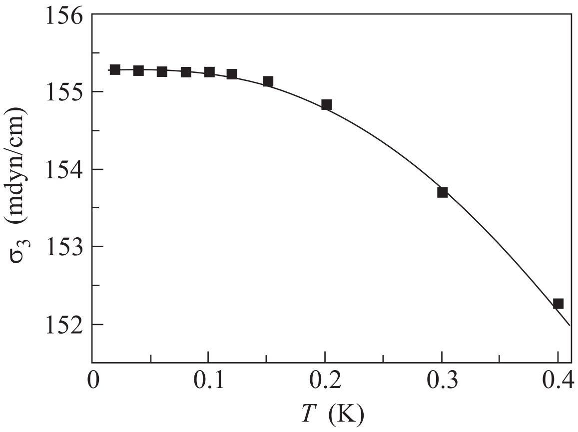

Рис.1. Сравнение температурной зависимости поверхностного натяжения $\sigma_3(T)$ жидкого He^3, определенной выражением (21) (сплошная линия) и экспериментальных данных работ [2,3] (точки) в области низкой температуры. Предлагаемая теория хорошо объясняет отклонение зависимости $\sigma_3(T)$ от квадратичной при $T < \Delta_3^0$

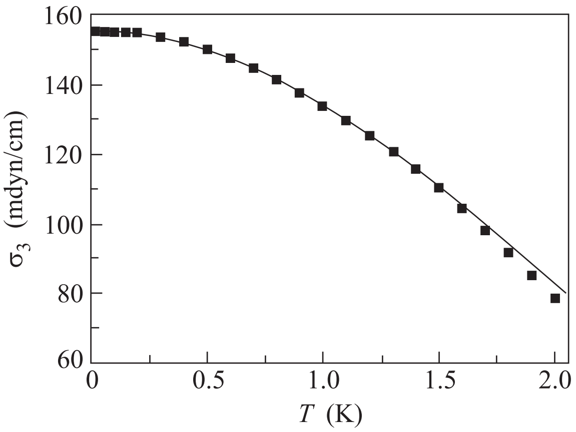

Рис.2. Сравнение рассчитанной зависимости σ_3 от T (21) с опытными данными [2,3] в широком интервале температур

Для обоснования модели идеального тумана приведем значение плотности $n_3(T)$ (16) при $T = 1\,\text{K}$: $n_3(1) = 1.44 \cdot 10^{14}\,\text{см}^{-2}$. Полностью насыщенному (плотно упакованному) туману отвечает величина $(n_{03})^{2/3} = 6.5 \cdot 10^{14}\,\text{см}^{-2}$, где n_{03} – плотность жидкого He^3. Так как $n_3(1) \ll (n_{03})^{2/3}$, приближение $\lambda_3 = 0$ в уравнении (17) имеет область применимости по крайней мере при низких температурах. Рассматриваемая модель (20), (21) не объясняет немонотонность зависимости $\sigma_3(T)$ при $T \approx 0.1\,\text{K}$, то есть эффекты $\approx 3 \cdot 10^{-4}$ [4]. Поэтому следует уточнять модель ферми-жидкостными поправками, которые уже рассматривались в работах [12–15]. Однако в рамках теории ферми-жидкости невозможно объяснить температурную зависимость $\sigma_3(T)$ (2) при высоких $T > T_F$, когда He^3 является квантовой, но невырожденной жидкостью [8, 9].

3. Определение поверхностного натяжения жидкого He^4, $\sigma_4(T)$ предполагает выделение вклада поверхностных уровней $\sigma_S(T)$ на фоне риплонного вклада $\sigma_R(T) = -AT^{7/3}$ при $T < 1\,K$ [5]:

$$\sigma_4(T) = \sigma_4(0) + \sigma_R(T) + \sigma_S(T). \qquad (22)$$

Аналогично (6), (16) можно определить величины $\sigma_S(T)$ и $n_4(T)$ [6]:

$$\sigma_S(T) = -T^2 \frac{M_4}{2\pi\hbar^2} \cdot \int\limits_0^\infty \frac{x dx}{\exp(x + \dfrac{\Delta_4}{T}) - 1}, \qquad (23)$$

$$n_4(T) = -\frac{M_4 T}{2\pi\hbar^2} \ln\Big[1 - \exp\Big(-\frac{\Delta_4}{T}\Big)\Big],$$

где M_4 – эффективная масса атома He^4, а Δ_4 – энергия поверхностного уровня, отсчитанная от химического потенциала μ_4: $\Delta_4 = \varepsilon_4^0 - \mu_4$. Зависимость $\mu_4 = \mu_4(T)$ дается выражением (11) с заменой $C_3 \to C_4$. Теплоемкость $C_4(T)$, в отличие от $C_3(T)$, не имеет большого спинового вклада, поэтому при $T < T_\lambda$ можно положить $\mu(T) = \mu(0) = -7.15\,K$. В модели идеального тумана на основе сравнения (22), (23) и опытных данных работы [1] определяются параметры $\Delta_4 \approx 4\,K$ и $M_4 \approx 2.6\,M_4^0$, где M_4^0 – масса атома He^4. Температурная зависимость $\sigma_4(T)$ при $T < T_\lambda$ имеет вид (рис.3)

$$\sigma_4(T) = \sigma_4(0) - AT^{7/3} - \alpha_4^0 T^2 \int\limits_0^\infty \frac{x dx}{\exp(\dfrac{\Delta_4}{T} + x) + 1}, \qquad (24)$$

где $\sigma_4(0) = 354.4$, постоянная Аткинса $A = 6.8$ и $\alpha_4^0 = 47$. Соответствующее значение энергии поверхностного уровня $\varepsilon_4^0 \approx -3.15\,K$.

На основе (23), (24) и данных [1] существует интересная возможность определить риплонный вклад в $\sigma_4(T)$ при $T > T_\lambda$ (рис.4):

$$-\sigma_R(T) = \sigma_4(0) - \sigma_4(T) + \sigma_S(T). \qquad (25)$$

Для величины $\sigma_S(T)$ температура сверхтекучего перехода T_λ ничем не выделена, поэтому зависимость (23) имеет место и при $T > T_\lambda$. Однако для $\sigma_R(T)$ переход через точку $T = T_\lambda$ очень критичен, как это видно на рис.4. При $T > T_\lambda$ риплоны сильно затухают, что связано с большим значением вязкости η нормального He^4. Коэффициент затухания риплонов

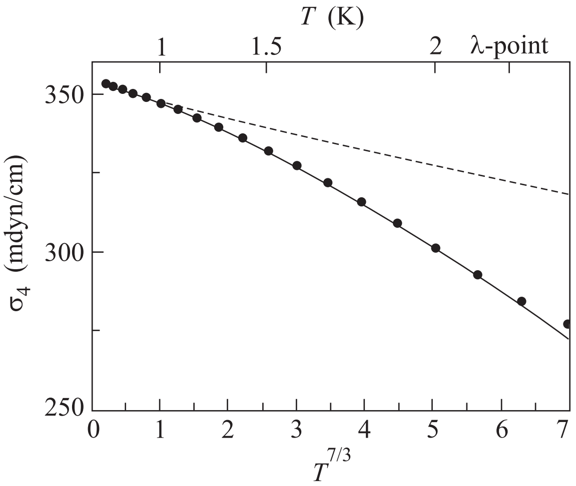

Рис.3. Температурная зависимость поверхностного натяжения σ_4 жидкого He^4, определенная на основе (24) (сплошная линия) и риплонный вклад в $\sigma_4(T)$ (пунктирная линия). Точки – данные работы [1]

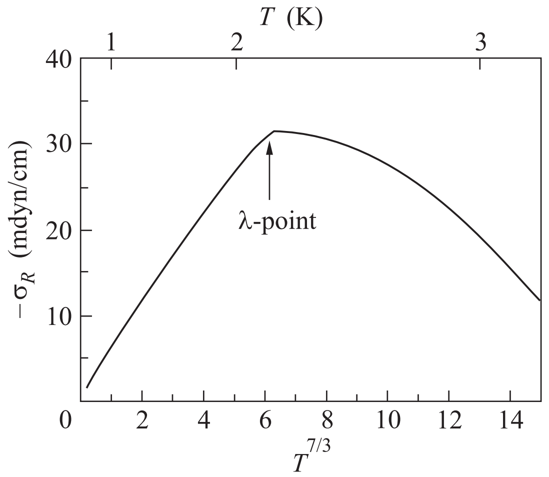

Рис.4. Риплонный вклад $\sigma_R(T)$ в поверхностное натяжение $\sigma_4(T)$, определенный на основе (23), (25) и экспериментальных данных [1]

γ можно оценить на основе связи γ с η и плотностью жидкости ρ [16]: $\gamma = 2\eta k_T^2/\rho$. Характерный тепловой импульс k_T находится из условия $\hbar\omega(k_T) \approx T$, где $\omega^2(k_T) = \sigma k_T^3/\rho$. Малость $\gamma(k_T) < \omega(k_T)$ возможна, если выполнено неравенство

$$\frac{2\eta(T)}{\sigma^{2/3}} \left(\frac{T}{\hbar\rho}\right)^{1/3} < 1. \qquad (26)$$

Для He^4 из (26) следует критерий

$$\eta_4(T)\, T^{1/3} \cdot 4 \cdot 10^4 < 1, \qquad (27)$$

где η_4 в г/см · с. Для нормального He^4 $\eta_4(T) > 2 \cdot 10^{-5}$, поэтому неравенство (27) не имеет места для He^4 при $T > T_\lambda$.

Для жидкого He^3 аналогичное неравенство имеет вид

$$\eta_3(T)\,T^{1/3} \cdot 10^5 < 1. \qquad (28)$$

Согласно опытным данным [17] и теории [9] зависимость $\eta_3 = \eta_3(T)$ при $T < 2\,\mathrm{K}$ дается выражением

$$\eta_3(T) = \left(\frac{2.5}{T^2} + 17.5 + \frac{9.4}{T}\right) \cdot 10^{-6} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}. \qquad (29)$$

Из (28), (29) видно, что для жидкого He^3 тепловые риплоны сильно затухают при всех T, а не только при $T \ll T_F$, когда $\eta_3(T) \sim 1/T^2$ (29). По этой причине термодинамика поверхности жидкого He^3 полностью определяется вкладом поверхностных уровней при $T < 2\,\mathrm{K}$ (рис.2). Для жидкого He^4 вклад риплонов в $\sigma_4(T)$ является главным при $T < 1\,\mathrm{K}$, но несущественным при $T > 2.5\,\mathrm{K}$ (рис.4). Отметим, что объяснение отличия зависимости $\sigma_4 = \sigma_4(T)$ от закона Аткинса (1) при $T > 1\,\mathrm{K}$ существованием ротонного минимума у спектра риплонов [17] не согласуется с нашими представлениями. На рис.4 видно, что $\sigma_R \sim T^{7/3}$ при всех $T < T_\lambda$.

Итак, мы предложили количественную теорию поверхностных явлений для жидкого гелия, которая согласуется с экспериментальными результатами серии прекрасных работ, выполненных в Японии [1–3].

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (# 03-02-16121) и INTAS (# 01-0791).

1. M. Iino, M. Suzuki, and A. J. Ikushima, J. Low Temp. Phys. **61**, 155 (1985).
2. M. Iino, M. Suzuki, A. J. Ikushima, and Y. Okuda, J. Low Temp. Phys. **59**, 291 (1985).
3. M. Suzuki, Y. Okuda, A. J. Ikushima, and M. Iino, Europhys. Lett. **5**, 333 (1988).
4. K. Matsumoto, Y. Okuda, M. Suzuki, and S. Misawa, J. Low Temp. Phys. **125**, 59 (2001).
5. K. R. Atkins, Can. J. Phys. **31**, 1165 (1953).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, М.: Наука, 1976.
7. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **50**, 1415 (1966).
8. A. M. Dyugaev, J. Low Temp. Phys. **78**, 79 (1990).
9. A. M. Dyugaev, Sov. Sci. Rev. A. Phys. **14**, 1 (1990).
10. K. Shirahama, S. Ito, H. Suto, and K. Kono, J. Low Temp. Phys. **101**, 439 (1995).
11. D. S. Greywall, Phys. Rev. **B27**, 2747 (1983).
12. F. Dalfovo and S. Stringari, J. Low Temp. Phys. **77**, 307 (1989).
13. S. Misawa, J. Low Temp. Phys. **125**, 49 (2001).
14. S. Misawa and H. Morita, Physica **B165**, 643 (1990).
15. H. Esbensen and G. F. Bertsch, Phys. Rev. Lett. **52**, 2257 (1984).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Гидродинамика, М.: Физматлит, 2001.
17. Л. С. Реут, И. З. Фишер, ЖЭТФ **60**, 1814 (1971).