

## ДИСПЕРСИОННЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИИ И ВКЛАД ТРЕХЧАСТИЧНОЙ УНИТАРНОСТИ

И.Л.Грач<sup>1)</sup>, И.М.Народецкий, М.Ж.Шматиков<sup>2)</sup>

Показаны 1) эквивалентность одноканального  $N/D$  метода полюсному приближению в модели Амадо и 2) необходимость учета трехчастичной  $s$ -канальной унитарности при вычислении (в рамках дисперсионного метода) основных и возбужденных состояний трехчастичной системы.

В последнее время в теории малонуклонных систем широко обсуждается дисперсионный метод, основанный на использовании аналитических свойств амплитуды рассеяния [1 - 5]. Недавние исследования показывают возможность применения этого подхода к системам, содержащим антибарионы [6]. Однако, при практическом решении  $N/D$  уравнений обычно используется ряд приближений, и точность этих приближений до настоящего времени остается невыясненной. В частности, возникают вопросы 1) какова практическая сходимость метода, т. е. сколько борновских диаграмм требуется для восстановления с помощью  $N/D$  уравнений полной амплитуды и 2) какова при этом роль многочастичного условия унитарности. В настоящей статье мы дадим ответ на оба эти вопроса, сравнивая предсказания дисперсионного метода для связанных состояний в системе трех частиц с результатами точно решаемой трехчастичной модели.

Сравнение результатов, полученных из решения  
 $N/D$  уравнений с двухчастичной унитарностью  
с результатами точного решения модели Амадо.  
Энергии связанных состояний (в единицах  $M\epsilon v$ )  
отсчитываются от порога трехчастичного развала.

	$E_b$	$N/D$ уравнения		Модель Амадо	
		$B^{(1)}$	$B^{(1)} + B_{bare}^{(2)}$	полюсное приближение	точное решение
3N система $\zeta = 6,26$	$E_1$	2,7	4,3	4,6	25,5
	$E_2$	-	-	-	2,38
3a система $\zeta = 1,45$	$E_1$	3,3	4,4	5,9	13,0
	$E_2$	-	-	-	3,07

<sup>1)</sup> Московский радиотехнический институт АН СССР

<sup>2)</sup> Институт Атомной Энергии им. И.В.Курчатова

Рассмотрим систему трех тождественных частиц с массой  $m$ , взаимодействующих посредством сепарабельного потенциала с формфактором  $\Gamma(p) = (p^2 + \beta^2)^{-1}$  (модель Амадо) [7]. Эта система характеризуется двумя параметрами: энергией связи двухчастичной подсистемы  $\epsilon = \alpha^2/m$  и радиусом взаимодействия  $r_0 = 1/\beta$ . Известно, что если парный потенциал достаточно сильный, чтобы связать каждую пару частиц, то система трех тождественных бозонов имеет два связанных состояния с  $J^P = 0^+$ : глубокое основное ( $E_1$ ) и слабо связанное возбужденное ( $E_2$ ). В таблице приведены значения  $E_1, E_2$  для случаев, когда  $\epsilon$  и  $\beta$  отвечают триплетному  $NN$ -взаимодействию [7] и низкоэнергетическому  $\alpha - \alpha$ -рассеянию [8]. Ниже мы рассмотрим оба указанных случая, в первом из которых  $\alpha r_0 \ll 1$  ( $\zeta = \beta/\alpha = 6,26$ ), а во втором  $\alpha r_0 \sim 1$  ( $\zeta = 1,45$ ), что приводит к существенному различию в относительном положении динамических особенностей трехчастичной амплитуды.

Рассмотрим  $s$ -волновую амплитуду рассеяния частицы на связанном состоянии двух других частиц  $f(E)$ , где  $E$  — кинетическая энергия в СЦМ<sup>1</sup>). Пренебрегая вкладом трехчастичной унитарности и линеаризуя двухчастичное условие унитарности с помощью подстановки  $\tilde{f} = \tilde{n}/D$ , получим для  $D(x)$  интегральное уравнение:

$$D(x) = 1 + \frac{2x}{\pi} \int \frac{\tilde{\xi}(x')D(x')}{x+x'} dx', \quad (1)$$

где  $\tilde{\xi}(x)$  — динамический скачок бэрновской амплитуды, которая обычно аппроксимируется несколькими первыми членами в ряду многократного рассеяния:  $\tilde{f} = \tilde{B}^{(1)} + \tilde{B}^{(2)} + \dots$ .

Полюсная амплитуда  $\tilde{B}^{(1)}$  имеет два логарифмических разреза, которые при  $\zeta < 3$  перекрываются и могут частично компенсировать друг друга. Явное выражение для скачков в рассматриваемой модели имеет вид<sup>2)</sup>:

$$\tilde{\xi}^{(1)}(x) = -\frac{4\pi\gamma}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{x^2} (\theta_1 - \theta_2) + (1 - \zeta^{-2}) \left[ \delta(x^2 - 3\zeta^2) - \delta(x^2 - \frac{\zeta^2}{3}) \right] \right\}, \quad (2)$$

<sup>1)</sup> В дальнейшем мы, следуя [1], используем безразмерные амплитуды  $\tilde{f}(y) = \frac{2\alpha f(y)}{\sqrt{3}}$ ,  $\tilde{B}(y) = \frac{2\alpha B(y)}{\sqrt{3}}$  и безразмерную переменную  $y = -x^2 = E/\epsilon$ ; пер-

вому листу плоскости энергии отвечают значения  $\text{Re}x \geq 0$ .

<sup>2)</sup> Отметим, что  $\xi^{(1)}$  имеет  $\delta$ -образные особенности, которые приводят к

тому, что функция  $\tilde{n}(x)$  имеет полюсы при  $x = \pm \frac{\zeta}{\sqrt{3}}$ ,  $\pm \zeta\sqrt{3}$ . Полюсы на втором листе плоскости энергии  $x = -\frac{\zeta}{\sqrt{3}}$ ,  $-\zeta\sqrt{3}$  компенсируются соответствующими полюсами функции  $D(x)$  [9], поэтому полная амплитуда имеет полюсы на первом листе при  $x = \frac{\zeta}{\sqrt{3}}$ ,  $\zeta\sqrt{3}$ .

где

$$y = \frac{\zeta(1+\zeta)^3}{(\zeta^2-1)^2}, \quad \theta_1 = \theta\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\theta(3-x^2), \quad \theta_2 = \theta\left(x^2 - \frac{\zeta^2}{3}\right)\theta(3\zeta^2-x^2).$$

Треугольная амплитуда  $\tilde{B}^{(2)}$  имеет аномальный разрез, начинающийся в точке  $x_a = \sqrt{3}$  и ряд потенциальных разрезов, начинающихся в точках  $x_p$ , которые для  $\zeta = 6,26$  расположены в следующей последовательности:  $x_p = \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{5}(1+2\zeta)$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\zeta)$ ,  $\frac{3\sqrt{3}}{5}\zeta$ ,  $\frac{2\zeta+1}{\sqrt{3}}$ ,  $\zeta\sqrt{3}$ . Явный вид для скачков  $\tilde{B}^{(2)}$  весьма громоздкий мы приведем его в другом месте; здесь же мы ограничимся предельным выражением  $\tilde{\xi}^{(2)}$  при  $\zeta \rightarrow \infty$

$$\tilde{\xi}^{(2)}(x) \rightarrow \frac{64\pi}{3} \frac{1}{x^3} \ln \frac{3x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \theta(x - \sqrt{3}). \quad (3)$$

Относительное положение аномального и потенциальных разрезов зависит от величины параметра  $\zeta$ ; в частности, при  $\zeta < 2$  ближайшим к физической области оказывается один из потенциальных разрезов.

Что касается особенностей более сложных диаграмм, то, во-первых, в рассматриваемом случае частиц равных масс диаграммы с двумя и более перерасеяниями не имеют аномальных сингулярностей [10], зависящих только от  $\epsilon$ . Таким образом, при  $g_0 \rightarrow 0$  особенности полюсной и треугольной диаграмм исчерпывают все левые особенности амплитуды. Потенциальные же особенности с ростом числа перерасеяний могут или уходить на бесконечность, или иметь точки сгущения [4].

Мы можем теперь выяснить вклад высших борновских диаграмм, сравнивая предсказания  $N/D$  уравнений в форме (1) с учетом левых особенностей только амплитуд  $\tilde{B}^{(1)}$  и  $\tilde{B}^{(2)}$  с точным решением модели Амадо в полюсном приближении. В этом приближении амплитуда  $f$  имеет (по терминологии [3]) двухчастичный унитарный скачок  $\Delta_5$  и "перекрестный" трехчастичный унитарный скачок  $\Delta_{4n}$ , но не содержит "прямого" трехчастичного разреза. Результаты приведены в таблице. Из решения  $N/D$  уравнений с треугольным графиком, содержащим "голый" (bare) пропагатор, мы получили энергию связи  $4,3 \text{ Мэв}$ , а точный ответ есть  $4,6 \text{ Мэв}$ ; таким образом, вклад отброшенных диаграмм составляет  $\lesssim 10\%$ . Этот результат очень важен с точки зрения дисперсионного метода в целом. Он показывает, что при  $ag_0 \ll 1$  учет полюсной и треугольной диаграмм с хорошей точностью исчерпывает весь динамический input амплитуды. В области  $ag_0 \sim 1$  влияние отброшенных членов более существенно и составляет  $\sim 25\%$ , однако и здесь можно говорить о разумном качественном согласии с точным решением.

Рассмотрим теперь вклад трехчастичной унитарности. Отметим прежде всего, что в полюсном приближении в модели Амадо возникает один мелкий уровень, а точное решение содержит два уровня. Возникает вопрос, отвечает ли мелкий уровень возбужденному состоянию трехчастичной системы или он является сильно недосвязанным основным состоя-

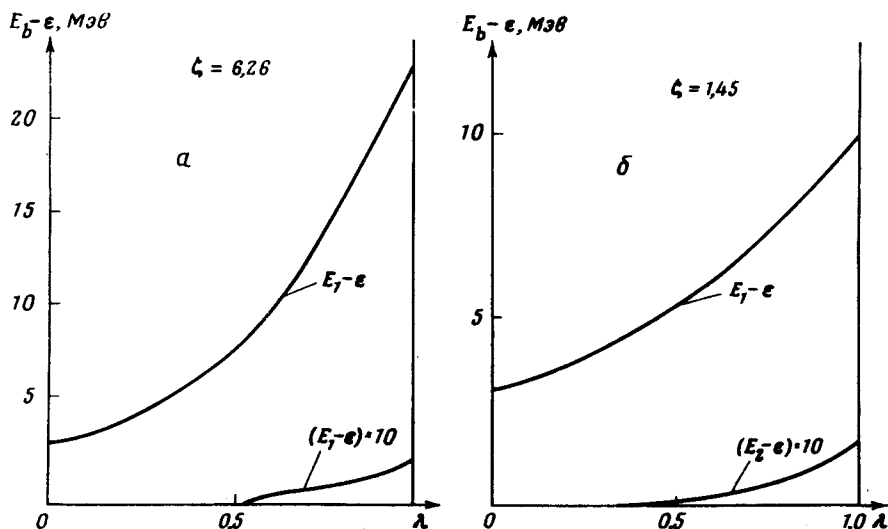
нием. Этот вопрос можно выяснить, вводя параметр  $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ , определяющий вклад прямых трехчастичных промежуточных состояний, и прослеживая траекторию мелкого уровня при изменении  $\lambda$ . Технически это удобно сделать, заменив в уравнении Фаддеева

$$r(y) = \left\{ 1 - \frac{(1 + \zeta)^2}{(\zeta + \sqrt{1 - y})^2} \right\}^{-1} \quad (4)$$

на

$$r(y, \lambda) = \frac{1 + \zeta}{y} + \lambda \left\{ 1 + \frac{\zeta(1 + \zeta)}{1 + \sqrt{1 - y}} \frac{1}{1 + 2\zeta + \sqrt{1 - y}} \right\} \quad (5)$$

и рассматривая поведение фаддеевских решений как функцию  $\lambda$ . Наши расчеты показывают, что с изменением  $\lambda$  мелкий уровень непрерывно углубляется ( $\frac{dE_1}{d\lambda} < 0$ ), становясь при  $\lambda = 1$  основным, а возбужденный уровень впервые появляется при некотором  $\lambda > 0$ . На рисунке показано поведение  $J^P = 0^+$  уровней в  $3N$  и  $3a$ -системах в зависимости от  $\lambda$ .



Возбужденный уровень впервые появляется при  $\lambda = 0,6$  в случае  $3N$  системы и  $\lambda = 0,4$  в случае  $3a$ -системы. Таким образом, при вычислении связанных состояний трехчастичных систем учет многочастичной унитарности представляется необходимым<sup>3)</sup>. Это в равной степени относится

<sup>3)</sup> Феноменологически вклад трехчастичных промежуточных состояний может быть учтен в одноканальных  $N/D$  уравнениях с помощью введения CDD-полюсов [5].

ся и к четырехчастичным связанным состояниям [11]. Укажем еще, что многочастичная унитарность необходима для объяснения (в рамках  $N/D$  метода) двух основных качественных эффектов в малонуклонных системах. Хорошо известно, что ядро, уравнений Фаддеева расходится в двух предельных случаях  $r_0 \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow 0$ , что приводит к теореме Томаса и к эффекту Ефимова [12]. Между тем, легко видеть, что  $N/D$  уравнения с двухчастичной унитарностью остаются в этих предельных случаях фредгольмовыми. Поэтому расходимость решений  $N/D$  уравнений при  $r_0 \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow 0$  может быть связана только с включением трехчастичной унитарности.

В заключение отметим, что возможны физические ситуации, когда вклад трехчастичной унитарности несущественен. Примером такой ситуации является квартетное  $n-d$ -рассеяние, когда в силу принципа Паули все три частицы не могут одновременно находиться на малых расстояниях друг от друга. В этом случае уже простейшее приближение в одноканальном  $N/D$  методе дает удовлетворительные результаты [1].

Авторы благодарят Ю.А.Симонова за интересные обсуждения.

Институт теоретической  
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию  
6 июля 1977 г.

### Литература

- [1] G.Barton, A.C.Phillips. Nucl. Phys., A132, 97, 1969.
- [2] A.S.Rinat, M.Stingl. Ann. of Phys., 65, 141, 1971; M.Stingl, A.S.Rinat. Phys. Rev., C10, 1253, 1974.
- [3] А.М.Бадалян, Ю.А.Симонов. ЭЧАЯ, 6, 299, 1975.
- [4] J.M.Greben, L.P.Kok. Phys. Rev., C13, 1352, 1976.
- [5] A.T.Stelbovics. Phys. Lett., 63B, 374, 1976.
- [6] А.М.Бадалян, И.М.Народецкий. ЯФ, 27, 971, 1977.
- [7] A.G.Sitenko, V.F.Kharchenko. Nucl. Phys., 49, 15, 1963; R.Aaron, R.D.Amado, Y.Y.Yam. Phys. Rev., 136B, 650, 1964.
- [8] D.R.Harrington. Phys. Rev., 147, 685, 1966; В.Ф.Харченко, В.Е.Кузьмичев. Препринт ИТФ-73-97Р.
- [9] I.M.Narodetsky et al. Preprint-ИТЕР-28, 1977.
- [10] M.Rubin, R.Sugar, G.Tiktopoulos. Phys. Rev., 146, 1130, 1966; 159, 1348, 1967; 162, 1555, 1967; Л.Д.Блохищев, Ю.А.Симонов. ТМФ, 33, 1977.
- [11] J.M.Greben, I.M.Narodetsky. Brown University preprint 1977.
- [12] L.Thomas. Phys. Rev., 47, 903, 1935; V.Efimov. Phys. Lett., 33B, 563, 1970.