Письма в ЖЭТФ, том 26, вып. 8, стр. 608 – 611 *20 октября 1977 г.*

РЕЛЯТИЗИСТСКАЯ ФАКТОРИЗОВАННАЯ S-МАТРИЦА В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ С ИЗОТОПИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ $O(N)$

Александр Замолодчиков, Алексей Замолодчиков

Построена факторизованная $O(N)$-симметричная S-матрица и аргументировано, что она является точной S-матрицей двумерной $O(N)$-киральной модели теории поля.

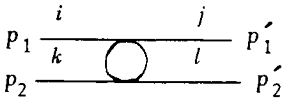
Известны модели квантовой теории поля (КТП) в двумерном пространстве-времени, в которых в связи с существованием бесконечного набора законов сохранения отсутствует множественное рассеяние частиц и факторизуется многочастичная S-матрица [1, 2]. Пример такой модели – массивная модель Тирринга (ММТ), или, эквивалентно, квантовая модель sine-Gordon. Упрощенные свойства рассеяния частиц в ММТ позволяют найти явный вид полй S-матрицы [3 – 5].

В недавней работе Каровски, Тун, Труонг и Вейс [6] установили, что решение уравнений аналитичности (УА), унитарности (УУ) и уравнений факторизации (УФ) [4, 5] для ММТ однозначно с точностью до одного произвольного параметра, выражаемого через константу связи ММТ.

ММТ, как модель заряженных фермионов, обладает фазовой симметрией $U(1) = O(2)$. В настоящей работе строится факторизованная S-матрица с изотопической симметрией $O(N)(N \geq 3)$ и аргументируется, что она является точной S-матрицей двумерной $O(N)$-симметричной киральной модели. Последняя перенормируема и асимптотически свободна [7], и является, таким образом, первым точно решаемым примером асимптотически свободной КТП. Оказывается, что при $N \geq 3$ S-матрица определяется однозначно (без произвольных параметров) из УА, УУ и УФ.

Рассмотрим изовекторный N-плет частиц массы m и потребуем $O(N)$-симметрии S-матричных элементов. Именно, двухчастичный S-матричный элемент представим в виде

$${}_{ik}S_{jl} =$$



$$= \delta(p_1 - p_1')\delta(p_2 - p_2')[\delta_{ik}\delta_{jl}\sigma_1(s) +$$

$$+ \delta_{ij}\delta_{kl}\sigma_2(s) + \delta_{il}\delta_{jk}\sigma_3(s)]; \quad s = (p_1 + p_2)^2. \qquad (1)$$

Вместо импульсов частиц удобно использовать быстроты θ_a: $p_a^0 = m\,\mathrm{ch}\,\theta_a$; $p_a^1 = m\,\mathrm{sh}\,\theta_a$. При этом σ_1, σ_2 и σ_3 будут функциями переменной $\theta = |\theta_1 - \theta_2|$; $s = 2m^2(1 + \mathrm{ch}\,\theta)$. Из двухчастичного УУ следует, что порогам $s = 0$ и $s = 4m^2$ функций $\sigma(s)$ соответствуют однозначные точки $\sigma(\theta)$, так что σ_1, σ_2 и σ_3 можно считать мероморфными функциями θ.

Условия кроссинг-симметрии (1) и двухчастичные УУ можно представить в виде

$$\sigma_2(\theta) = \sigma_2(i\pi - \theta), \qquad (2a)$$

$$\sigma_3(\theta) = \sigma_1(i\pi - \theta) \qquad (2b)$$

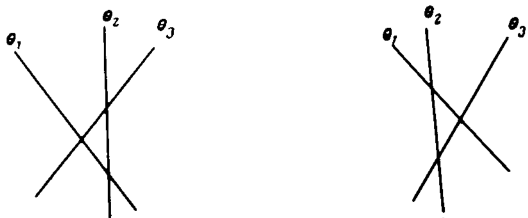
и

$$\sigma_2(\theta)\sigma_2(-\theta) + \sigma_3(\theta)\sigma_3(-\theta) = 1, \qquad (3a)$$

$$\sigma_2(\theta)\sigma_3(-\theta) + \sigma_2(-\theta)\sigma_3(\theta) = 0, \qquad (3b)$$

$$[N\sigma_1(\theta) + \sigma_2(\theta) + \sigma_3(\theta)][N\sigma_1(-\theta) + \sigma_2(-\theta) + \sigma_3(-\theta)] = 1. \qquad (3c)$$

В дополнение к унитарности и кроссингу потребуем факторизации многочастичной S-матрицы. Под факторизацией понимается распадение многочастичных S-матричных элементов на сумму членов, являющихся произведениями двухчастичных, таким образом, как если бы процесс многочастичного рассеяния сводился к последовательности парных столкновений.



а б

Самосогласованность условия факторизации требует выполнения специальных тождеств для двухчастичных S-матричных элементов, которые мы называем УФ. УФ имеют простой смысл. Рассмотрим, например столкновение трех частиц с быстротами $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. В области взаимодействия частицы последовательно сталкиваются друг с другом, причем последовательность этих столкновений зависит от начального расположения частиц, как показано на рисунке. В квантовой механике два варианта рис. *а* и *б* дают две части одной и той же выходящей волны. Так как сохранение набора импульсов частиц при рассеянии означает монохроматичность выходящей волны, то волны, соответствующие рис. *а* и *б* должны быть когерентны. Требование когерентности этих волн диктует определенные соотношения на функции σ-УФ, число и вид которых, очевидно, различны для случаев $N = 2$ и $N \geqslant 3$. Для $N = 2$ УФ приведены в [4 – 6], а их решение есть S-матрица ММТ [6]. Для случая $N \geqslant 3$ УФ имеют вид

$$\sigma_2\sigma_3\sigma_3 + \sigma_3\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3. \tag{4a}$$

$$N\,\sigma_1\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_3\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_1\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_3, \tag{4b}$$

где аргумент первого множителя в каждом члене есть θ, второго $\theta + \theta'$, а третьего θ'.

Уравнения (4а) и (2b) означают, что

$$\sigma_3(\theta) = \frac{-i\lambda}{\theta}\,\sigma_2(\theta)\,; \qquad \sigma_1(\theta) = \frac{-i\lambda}{i\pi - \theta}\,\sigma_2(\theta)\,, \tag{5}$$

где λ – произвольный пока параметр. При выполнении (5) уравнение (3b) удовлетворяется тождественно. Замечательно, что при этом уравнения (4b) и (3c) диктуют одно и то же алгебраическое уравнение на λ, которое имеет одно решение (кроме тривиального $\lambda = 0$)

$$\lambda = \frac{2\pi}{N - 2} \tag{6}$$

Уравнение (3а) принимает вид

$$\sigma_2(\theta)\,\sigma_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}\,. \tag{7}$$

Решение уравнений (2а) и (7), имеющее особенности только на мнимой оси θ-плоскости однозначно с точностью до КДД полюсов

$$\sigma_2(\theta) = \left[\prod_{k=1}^{L} \frac{\operatorname{sh}\theta + i\sin a_k}{\operatorname{sh}\theta - i\sin a_k}\right]\sigma_2^{(0)}(\theta)\,, \tag{8}$$

где a_k – вещественные числа, а $\sigma_2^{(0)}$ – "минимальное" решение (2а) и (7), т. е. решение с минимальным числом особенностей в θ-плоскости:

$$\sigma_2^{(0)}(\theta) = G(\theta)G(i\pi - \theta), \tag{9}$$

$$G(\theta) = \frac{\Gamma\left(\Delta - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(-i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \Delta - i\frac{\theta}{2\pi}\right)}\,; \qquad \Delta = \frac{1}{N - 2}\,. \tag{10}$$

В принципе допустимы все решения (8), однако случай $\sigma_2 = \sigma_2^{(o)}$ выделен тем, что он единственный не приводит к вырождению спектра по изоспину. Решение $\sigma_2 = \sigma_2^{(o)}$ не содержит полюсов на физическом листе s-плоскости, т. е. изовекторные частицы не образуют связанных состояний.

Мы предполагаем, что решение $\sigma_2 = \sigma_2^{(o)}$ дает точную S-матрицу $O(N)$-симметричной киральной модели, описываемой плотностью Лагранжиана и условием связи

$$L = \frac{1}{2g_0} \sum_{i=1}^{N} (\partial_\mu n_i)^2; \qquad \sum_{i=1}^{N} n_i^2 = 1. \tag{11}$$

Инфракрасный рост заряда в этой модели приводит, по-видимому, к разрушению голдстоуновского вакуума и появлению массы частиц, которые должны в таком случае образовывать мультиплеты $O(N)$, как это имеет место в $1/N$ разложении модели (11) [8].

В рамках $1/N$-разложения модели (11) мы проверили исчезновение амплитуд $2 \to 4$ и факторизацию амплитуд $3 \to 3$ в порядке $1/N^2$. При этом амплитуды $2 \to 2$, вычисленные в порядке $1/N$, оказываются совпадающими с соответствующим членом разложения по $1/N$ решения (5), (8) при выборе $\sigma_2 = \sigma_2^{(o)}$.

Один из авторов благодарен Е.С.Фрадкину, общение с которым в значительной мере стимулировало выполнение этой работы. Мы благодарны также А.А.Мигдалу за ценные замечания.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
1 июля 1977 г.

Литература

[1] В.Е.Корепин, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 25, 147, 1975.

[2] С.Н.Вергелес, В.М.Гряник. ЯФ, 23, 1324, 1976.

[3] А.Б.Замолодчиков. Письма в ЖЭТФ, 25, 499, 1977.

[4] A.B.Zamolodchikov. Preprint ITEP-12, 1977.

[5] M.Karowski, H.-J.Thun. Preprint FUB/HEP, Febr. 77/5.

[6] M.Karowski, H.-J.Thun, T.T.Truong, P.H.Weisz. Phys. Lett., 67B, 321, 1977.

[7] A.M.Polyakov. Phys. Lett., 59B, 79, 1975.

[8] E. Brezin, J.Zinn-Justin. Phys. Rev., B14, 3110, 1976.