Письма в ЖЭТФ, том 28, вып.8, стр. 554 – 558 *20 октября 1978 г.*

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ОБОБЩЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИХ КИРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

А.В.Михайлов

Суперсимметричные обобщения двумерных интегрируемых моделей теории поля дают нам примеры взаимодействующих полей, к которым также применим метод обратной задачи. Впервые на это обстоятельство обратили внимание авторы работы [1], где они высказали гипотезу, что суперсимметричное обобщение уравнения sine Gordon обладает бесконечной последовательностью интегралов движения. Доказательство этой гипотезы получено в недавно вышедших препринтах [2,3], где впервые найдены "L-A пары", необходимые для применения метода обратной задачи, и вычислены рекуррентные формулы для законов сохранения.

В работе [4] показано, что все известные на сегодняшний день интегрируемые модели теории поля являются калибровочно эквивалентными модели главных киральных полей. Мы надеемся, что аналогичное положение обнаружится и для суперсимметричных обобщений этих моделей. Поэтому здесь мы изучаем суперсимметричные обобщения модели главных киральных полей – суперкиральные поля, и вычисляем для них солитонные решения.

Следуя Виттену [6] рассмотрение суперсимметричных моделей будем вести на языке суперпространства, каждая точка которого имеет обычные координаты x_μ $(\mu = 0,1)$ и дополнительные антикоммутирующие координаты θ_α $(\alpha = 1,2)$ образующие майорановский спинор. Определим γ-матрицы Дирака и $\bar{\psi}$ следующим образом:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1, \quad \bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0.$$

Под классическим суперполем $\hat{\Phi}(x, \theta)$ будем понимать поле принимающее значение либо на четном G'' компоненте грассмановой алгебры, либо на нечетном G' компоненте (о грассмановой алгебре см. [7]). Разлогая $\hat{\Phi}$ по θ получим

$$\hat{\Phi} = \Phi + i\theta_2\psi_1 - i\theta_1\psi_2 + i\theta_1\theta_2 F,$$

причем, если $\hat{\Phi}\in G'$, то Φ, $F\in G'$, $\psi_{1,2}\in G''$; если $\hat{\Phi}\in G''$, то Φ, $F\in G''$, $\psi_{1,2}\in G'$. Пусть в каждой точке суперпространства задан элемент $\hat{g}(\xi, \eta, \theta_1, \theta_2)$ группы $SU(N)$[1)] т.е. матрица $\hat{g}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2 \ldots N)$ имеющая разложение:

$$\hat{g} = (I + i\theta_2\Lambda_1 - i\theta_1\Lambda_2 + i\theta_1\theta_2 F)g. \tag{1}$$

---

1) Для краткости мы ограничились рассмотрением группы $SU(N)$, поскольку киральные поля на других группах ($SO(N)$, $Sp(2N)$) обобщаются на случай суперсимметрии аналогичным образом.

и удовлетворяющая условию унитарности:

$$\hat{g}\hat{g}^+ = \hat{g}^+\hat{g} = I \qquad (2)$$

или покомпонентно

$$gg^+ = g^+g = I\,,\quad \Lambda_{1,2} + \Lambda^+_{1,2} = 0\,,\quad F + F^+ - i\,\Lambda_1\Lambda_2^+ + i\,\Lambda_2\Lambda_1^+ = 0\,. \qquad (3)$$

Суперсимметрия уравнений для $\hat{g}$ означает инвариантность их относительно суперпреобразования $\delta\hat{g} = (\bar{\epsilon}Q)\hat{g}$, порожденного генератором Q группы суперсимметрии:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial\theta_2 + i\theta_2\partial_\xi \\ -\partial/\partial\theta_1 - i\theta_1\partial_\eta \end{pmatrix}$$

ϵ – бесконечно малый майорановский спинор. Введем ковариантные производные, антикоммутирующие с Q_a:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial\theta_2 - i\theta_2\partial_\xi \\ -\partial/\partial\theta_1 + i\theta_1\partial_\eta \end{pmatrix}.$$

Действие для суперкирального поля

$$S = \int d\theta_2 d\theta_1 d\xi d\eta\ \mathrm{Sp}(D_1\hat{g}\, D_2\hat{g}^+) \qquad (4)$$

с учетом связи (2) приводит к уравнению

$$D_2(D_1\hat{g}\hat{g}^+) - D_1(D_2\hat{g}\hat{g}^+) = 0 \qquad (5)$$

или, учитывая разложение (1)

$$2i\Lambda_{2\xi} - [ig_\xi g^+,\ \Lambda_2)] + \frac{1}{2}[\Lambda_2\Lambda_1^2] = 0, \qquad (6)$$

$$2i\Lambda_{1\eta} - [ig_\eta g^+,\ \Lambda_1)] + \frac{1}{2}[\Lambda_1\Lambda_2^2] = 0, \qquad (7)$$

$$(g_\xi g^+ - i\Lambda_1^2)_\eta + (g_\eta g^+ - i\Lambda_2^2)_\xi = 0 \qquad (8)$$

Отметим, что в случае матриц 2×2 система (6) – (8) совпадает с суперсимметричным обобщением σ-модели [6].

Введем супертоки $\hat{u}, \hat{v} \in G'$:

$$\hat{u} = D_1\hat{g}\hat{g}^+, \qquad \hat{v} = D_2\hat{g}\hat{g}^+ \qquad (9)$$

Из уравнения (5) и связи (2) следует, что они подчиняются системе уравнений

$$D_2\hat{u} - D_1\hat{v} = 0 \ , \ D_2\hat{u} + D_1\hat{v} - \{\hat{u}\hat{v}\} = 0 \cdot \tag{10}$$

Систему (10) можно рассматривать как условие существования совместного решения $\hat{\psi}(\xi, \eta, \theta_1, \theta_2, \lambda)$ пары линейных задач при всех значениях комплексного параметра λ:

$$D_1\hat{\psi} = (1+\lambda)^{-1}\hat{u}\hat{\psi} \ , \ D_2\hat{\psi} = (1-\lambda)^{-1}\hat{v}\hat{\psi} \ , \tag{11}$$

причем $\hat{g} = \hat{\psi}(\xi, \eta, \theta_1, \theta_2, 0)$ удовлетворяет системе (5).

Важным является вопрос о "классическом вакууме" суперкиральных полей. В теории обычных киральных полей на группе $SU(N)$ в качестве вакуумного решения естественно было выбирать диагональные матрицы $u^\circ(\xi) = i g_{0\xi}\, g_0^+$, $v^\circ(\eta) = i g_{0\eta} g_0^+$ не равные нулю [4]. Солитонные решения уравнений на u, v ассимптотически выходили на этот вакуум. Внутреннее устройство солитонов и даже сам факт их существования зависит от того какое решение u°, v° берется в качестве вакуумного. Действуя по аналогии,здесь мы также будем исходить из диагональных матриц $\hat{u}_0$, $\hat{v}_0$,удовлетворяющих уравнению (10):

$$\hat{u}_0 = i\chi_1(\xi) - \theta_2 u^\circ(\xi) \ , \ \hat{v}_0 = i\chi_2(\eta) + \theta_1 v^\circ(\eta). \tag{12}$$

Вычислим вакуумную волновую функцию $\hat{\psi}_0$ как решение уравнения (11):

$$\hat{\psi}_0 = \left(I - \frac{\theta_2\chi_1(\xi)}{1+\lambda} + \frac{\theta_1\chi_2(\eta)}{1-\lambda} + \frac{\theta_1\theta_2\chi_1(\xi)\,\chi_2(\eta)}{1-\lambda^2} \right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{i\int u^\circ(\xi)\,d\xi}{1+\lambda} + \frac{i\int v^\circ(\eta)\,d\eta}{1-\lambda} \right).$$

Процедура получения солитонного решения является тривиальным обобщением результатов работы [4] на случай суперпространства. Представим функцию $\hat{\psi}$ в виде

$$\hat{\psi} = \left(I - \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\hat{P} \right)\hat{\psi}_0 \ ,$$

где $\hat{P}$ – оператор проектирования ($\hat{P}^2 = \hat{P}$). Из уравнений (11) следует, что $\hat{P}$ подчиняется системе уравнений:

$$(1-\hat{P})(D_1 - (1+\bar{\lambda}_0)^{-1}\hat{u}_0)\hat{P} = 0 \ , \ (1-\hat{P})(D_2 - (1-\bar{\lambda}_0)^{-1}\hat{v}_0)\hat{P} = 0$$

общее решение которых есть оператор $\hat{P}$, проектирующий в пространство, натянутое на базисный набор

$$|\hat{e}^i(\xi, \eta, \theta_1, \theta_2)> = \hat{\psi}_o(\xi, \eta, \theta_1, \theta_2, \bar{\lambda}_o)|e^i_o>$$

где $|e^i_o>$, $i = 1, \ldots k$, какой-нибудь линейнонезависимый набор k векторов. Построим $\hat{p}^i = |\hat{e}^i><\hat{e}^i| / <\hat{e}^i|\hat{e}^i>$, тогда, если $k = 1$, то $\hat{P} = \hat{P}^1$, если $k = 2$, то

$$\hat{P} = \frac{\hat{p}^1 + \hat{p}^2 - \hat{p}^1\hat{p}^2 - \hat{p}^2\hat{p}^1}{1 - \mathrm{Sp}(\hat{p}^1\hat{p}^2)}$$

и т.д. Подставляя вычисленный проектор $\hat{P}$ в (13) при $\lambda = 0$, получим солитон поля $\hat{g}$.

Солитонное решение представляет собой уединенную волну экспоненциально быстро выходящую на вакуумное решение. Оно, по существу, является решением нелинейного уравнения для обычной киральной модели и последовательности линейных уравнений. В этом легко убедиться разложив поле по базису грассмановой алгебры. Предложенный здесь метод позволяет получить решение в замкнутом и компактном виде даже в том случае, когда число образующих грассмановской алгебры бесконечно.

В заключение отметим, что условия (11), расписанные по компонентам, носят не встречавшийся ранее в методе обратной задачи смешанный дифференциально-алгебраический характер. Использование условий совместности такого рода, привлечение расширенной суперагебры θ^i_a ($i = 1, \ldots m$) может оказаться полезным даже в том случае, когда поля являются обычными функциями (а не элементами грассмановой алгебры). Интегралы движения для рассмотренной здесь модели могут быть получены традиционным путем, обобщение которого на суперполя тривиально [2,3].

Мне приятно поблагодарить И.Я.Арефьеву, А.А.Белавина, С.В.Манакова, П.П.Кулиша за обсуждение и полезные замечания в процессе выполнения работы, В.Е.Захарова за внимание к работе.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 сентября 1978 г.

Литература

[1] S.Ferrara, S.Sciuto, L.Girardello. CERN preprint TH-2474, 1978.

[2] M.Chaichian, P.P.Kulish. University of Helsinki HU-TFT-78-16, 1978.

[3] L.Girardello, S.Sciuto. CERN preprint TH-2496, 1978.

[4] В.Е.Захаров, А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 27, 47, 1978; В.Е.Захаров, А.В.Михайлов. ЖЭТФ, 74, 1953, 1978.

[5] E.Witten. Phys. Rev., D16, 299, 1977.

[6] Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования. М., изд. Наука, 1965.