Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 1, стр. 47 – 51 *5 января 1978 г.*

ПРИМЕР НЕТРИВИАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОЛИТОНОВ В ДВУМЕРНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В.Е.Захаров, А.В.Михайлов

Показано, что в модели главного кирального поля на группе $SU(N)$, $N \geqslant 3$ имеются солитонные решения с нетривиальным взаимодействием (взаимопревращением) солитонов.

Первым примером полностью интегрируемой нелинейной теории поля в двумерном пространстве-времени была модель Sine Gordon [1]. Затем при помощи метода обратной задачи рассеяния удалось проинтегрировать массивную модель Тирринга [2] и комплексное обобщение уравнения Sine Gordon [3] введенное Полмайером [4]. Решения этих задач на качественном уровне имеют много общего. А именно: в процессе эволюции происходит естественное разделение начального условия на солитоны и несолитонную часть, взаимодействие между солитонами тривиально, т. е. приводит лишь к сдвигу их центров тяжести фаз, процессы множественного рождения запрещены законами сохранения. Впервые нетривиальное взаимодействие солитонов (распад солитона одной волны на два солитона других волн) было обнаружено в задаче трех волн [5]. Вопрос о существовании нетривиального взаимодействия в релятивистски инвариантных моделях до настоящего времени оставался открытым. В этой статье мы покажем, что в модели главного кирального поля[1)] на группе $SU(N)$, $N \geqslant 3$ имеются солитонные решения с нетривиальным взаимодействием солитонов.

Пусть в каждой точке пространства задан элемент группы $g(x,t) \in SU(N)$ т. е. унитарная унимодулярная матрица в N-мерном "изотипическом" пространстве. Лагранжиану

$$L = \frac{1}{2} \int \mathrm{Sp}\,(\partial_\mu g \partial^\mu g^+) dx \tag{1}$$

и связи $gg^+ = I$ соответствует уравнение движения

$$\partial_\mu \partial^\mu g - \partial_\mu g g^+ \partial^\mu g = 0 \,. \tag{2}$$

В случае $g \in SU(r)$ уравнение (2) совпадает с уравнением для **n** поля на трехмерной сфере, а следовательно приводится к уравнению комплексного Sine Gordon [4]. Введем эрмитовские поля A_μ принадлежащие алгебре Ли

$$A_\mu = i \partial_\mu g g^+. \tag{3}$$

Из уравнения (2) и связи следует, что A_μ подчиняется системе

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

$$i\partial_\mu A_\nu - i\partial_\nu A_\mu + [A_\mu A_\nu] = 0 \,. \tag{4}$$

В конусных переменных $\eta = (t + x)/2$, $\xi = (t - x)/2$ и $A = A_0 - A_1$, $B = A_0 + A_1$ система (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_\eta A &= \frac{i}{2} [A, B], \\ \partial_\xi B &= \frac{i}{2} [B, A]. \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что поля A_μ можно интерпретировать как токи порожденные симметрией лагранжиана (1) относительно сдвигов на группе $g \to hg$, где $h \in SU(N)$ любая постоянная матрица.

Применение метода обратной задачи к системе (3) основано на том факте, что уравнения (5) могут быть представлены как условие существования совместного решения системы

$$i\partial_\xi \Psi - \frac{A}{\lambda + 1} \Psi = 0, \tag{6}$$

[1)] Следуя терминологии введенной Л.Д. Фаддеевым главными киральными полями мы будем называть поля со значениями в группе Ли.

$$i\partial_\eta \Psi + \frac{B}{\lambda - 1}\Psi = 0 \qquad (7)$$

при всех значениях λ. В этом легко убедиться, коммутируя операторы, действующие на Ψ в уравнениях (6) и (7). Отметим, что любое решение задачи (6) и (7) является решением системы (5), кроме того полагая

$$g = \Psi(\lambda, \eta, \xi)|_{\lambda = 0} \qquad (8)$$

мы получаем точное решение задачи (2). Пусть $A^\circ(\xi)$, $B^\circ(\eta)$ – диагональные матрицы, тогда система (6), (7) автоматически совместна и имеет общее решение

$$\Psi_\circ(\lambda, \eta, \xi) = \exp\left[-i\int^{\xi}\frac{A^\circ(\xi')d\xi'}{\lambda+1} + i\int^{\eta}\frac{B^\circ(\eta')d\eta'}{\lambda-1}\right]. \qquad (9)$$

Поля A°, B°, $g^\circ = \Psi_\circ|_{\lambda=0}$ мы будем называть вакуумными решениями уравнений (5), (2). Для получения солитонного решения, следуя работе [6], представим Ψ в виде

$$\Psi = \Psi_1(\lambda, \eta, \xi)\Psi_\circ(\lambda, \eta, \xi), \qquad (10)$$

где

$$\Psi_1(\lambda, \eta, \xi) = I - \frac{\lambda_\circ - \bar\lambda_\circ}{\lambda - \bar\lambda_\circ}P(\eta, \xi) \qquad (11)$$

и P – эрмитовский оператор проектирования в изотопическом пространстве, а $\lambda_\circ = \lambda_\circ' + i\lambda_\circ''$ – комплексное число. Из уравнений (6), (7) следует, что функции

$$\frac{A(\eta,\xi)}{\lambda+1} = i\partial_\xi\Psi_1\Psi_1^{-1} + \Psi_1\frac{A^\circ(\xi)}{\lambda+1}\Psi_1^{-1}$$

$$\frac{B(\eta,\xi)}{\lambda-1} = -i\partial_\eta\Psi_1\Psi_1^{-1} - \Psi_1\frac{B^\circ(\eta)}{\lambda-1}\Psi_1^{-1} \qquad (12)$$

не имеют других особенностей, кроме полюса в точке $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ соответственно. Подставляя представление (11) в выражение (12) и приравнивая нулю вычеты в точках $\lambda = \lambda_\circ$, $\lambda = \bar\lambda_\circ$ получим уравнения на проектор

$$(I - P)\left(i\partial_\xi - \frac{A^\circ(\xi)}{\lambda+1}\right)P = 0$$

$$(I - P)\left(i\partial_\eta + \frac{B^\circ(\eta)}{\lambda-1}\right)P = 0 \qquad (13)$$

Здесь мы ограничимся рассмотрением простейшей ситуации, когда имеется лишь один ненулевой вектор $\langle \mathbf{C}^\circ | = \langle C_1^\circ \ldots C_N^\circ |$ удовлетворяющий условию

$$P(0, 0) | \mathbf{C}^\circ \rangle = | \mathbf{C}^\circ \rangle \, . \tag{14}$$

В этом случае

$$P(\eta, \xi) = \frac{\Psi_\circ(\lambda_\circ, \eta, \xi) | \mathbf{C}^\circ \rangle \langle \mathbf{C}^\circ | \Psi_\circ^+(\lambda_\circ, \eta, \xi)}{\langle \mathbf{C}^\circ | \Psi_\circ^+(\lambda_\circ, \eta, \xi) \Psi_\circ(\lambda_\circ, \eta, \xi) | \mathbf{C}^\circ \rangle} \tag{15}$$

является решением системы уравнений (13) с начальным условием (14). Используя вычисленный проектор (15), из формул (8), (10), (11), (12) получим солитонное решение

$$g = \left(I + \frac{\lambda_\circ - \bar{\lambda}_\circ}{\bar{\lambda}_\circ} P(\eta, \xi) \right) g^\circ(\eta, \xi),$$

$$A_{pq} = a_p \delta_{pq} + 4 \frac{\lambda_\circ''}{|1 + \lambda_\circ|^2} \left[i \frac{\lambda_\circ' + 1}{2\lambda_\circ''} (a_p - a_q) - \frac{a_p + a_q}{2} + \sum_{s=1}^{N} a_s P_{ss} \right] P_{pq},$$

$$B_{pq} = b_p \delta_{pq} + 4 \frac{\lambda_\circ''}{|1 - \lambda_\circ|^2} \left[i \frac{\lambda_\circ' - 1}{2\lambda_\circ''} (b_p - b_q) - \frac{b_p + b_q}{2} + \sum_{s=1}^{N} b_s P_{ss} \right] P_{pq},$$

где

$$A_{pq}^\circ = a_p \delta_{pq}, \qquad B_{pq}^\circ = b_p \delta_{pq} \, .$$

Проанализируем это решение для поля со значениями в $SU(3)$, считая матрицы A° и B° постоянными. Покажем, что оно описывает распад солитона одного компонента поля на два солитона других компонент. Картину развития решения определяют компоненты $|P_{pq}|$ (в чем не трудно убедиться, вычислив $|A_{pq}|$, $p \neq q$ или $|g_{pq}|$). Представим $|P_{pq}|$ в виде

$$\text{при } p \neq q \quad |P_{pq}| = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,(a_{pq}(x - v_{pq}t - x_{pq}^\circ)) + \exp(\Gamma_{pq}t - \kappa_{pq})}$$

$$\text{при } s \neq p, q \quad |P_{ss}| = \frac{1}{1 + 2\,\mathrm{ch}(a_{pq}(x - v_{pq}t - x_{pq}^\circ)) \exp(-\Gamma_{pqt} + \kappa_{pq})},$$

$$a_{pq} = a_p - a_q,\ \beta_{pq} = \beta_p - \beta_q,\ v_{pq} = \beta_{pq}/a_{pq},\ x^\circ_{pq} = -\ln(C_p/C_q)/a_{pq},$$

$$\Gamma_{pq} = 6\frac{a_p\beta_q - a_q\beta_p}{a_{pq}}, \quad \kappa_{pq} = 3(a_p + a_q)(x - v_{pq}t - x^\circ_{pq}) - T_{pq},$$

$$T_{pq} = a_{sp}(x^\circ_{pq} + x^\circ_{ps}) + a_{sq}(x^\circ_{pq} + x^\circ_{sq}), \quad a_p = \lambda''_\circ(b_p/|\lambda_\circ - 1|^2 + a_p/|\lambda_\circ + 1|^2),$$

$$\beta_p = \lambda''_\circ(-b_p/|\lambda_\circ - 1|^2 + a_p/|\lambda_\circ + 1|^2).$$

Если матрицы A° и B° линейно зависимы (т. е. $a_p b_q - a_q b_p = 0$) все $\Gamma_{pq} = 0$, и решение представляет собой солитон на границе распада (с нулевым дефектом масс). В невырожденном случае все Γ_{pq} не могут иметь одинаковый знак. Пусть, например, $\Gamma_{12} > 0 > \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$ тогда при $t \to -\infty$ существует один солитон движущийся со скоростью v_{12}:

$$|P_{12}| \to \frac{1}{2\operatorname{ch}(a_{12}(x - v_{12}t - x^\circ_{12}))}; \qquad P_{13},\ P_{23} \to 0,$$

при $t \sim -T_{pq}/\Gamma_{pq}$ происходит распад этого солитона и при $t \to +\infty$ образуется два солитона движущихся со скоростями v_{13}, v_{23} соответственно:

$$P_{12} \to 0;\ |P_{13}| \to \frac{1}{2\operatorname{ch}(a_{13}(x - v_{13}t - x^\circ_{13}))};\ P_{23} \to \frac{1}{2\operatorname{ch}(a_{23}(x - v_{23}t - x^\circ_{23}))}.$$

Время распада определяется инкрементом Γ_{pq}. Если $\Gamma_{13}, \Gamma_{23} > 0 > \Gamma_{12}$ (этого можно добиться другим выбором параметра $\lambda_\circ$), то решение описывает слияние двух солитонов.

Институт автоматики
и электроники
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
29 ноября 1977 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров, Д.Д.Фаддеев, Л.А.Тахтаджян. ДАН СССР, 219, 1334, 1974.

[2] А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 23, 356, 1976; Е.А.Кузнецов, А.В.Михайлов. ТМФ, 30, 303, 1977.

[3] F. Lund. Phys. Rev. Lett., 38, 1175, 1977.

[4] Pohlmayer. Comm. Math. Phys., 46, 207, 1976.

[5] В.Е.Захаров, С.В.Манаков. ЖЭТФ, 69, 1654, 1975.

[6] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Функцианальный анализ и его приложение (в печати)