Письма в ЖЭТФ, том 25, вып.1, стр. 26 – 28 5 января 1977 г.

О ВРАЩАЮЩЕМСЯ ^{3}He – A

Г.Е.Воловик, Н.Б.Копнин

Показано, что при вращении сосуда с ^{3}He – A возникает периодическая структура своеобразных вихрей, не имеющая сингулярностей в скорости сверхтекучей компоненты.

При вращении сосуда с ^{3}He – A нормальная компонента жидкости должна вращаться как целое (т. е. $\mathbf{v}_n = [\vec{\omega}, \mathbf{r}]$, где $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения), а поле сверхтекучей скорости $\mathbf{v}_s$ и вектора анизотропии $\mathbf{l}$ должны давать минимум функционала $\widetilde{F} = F - \mathbf{L}\vec{\omega}$, где F и $\mathbf{L}$ – полная свободная энергия и полный момент импульса жидкости. Воспользовавшись гидродинамическим выражением, данным в [1] для сверхтекучих частей свободной энергии и момента импульса, приведем функционал $\widetilde{F}$ к виду

$$\widetilde{F} = \int d^3\mathbf{r}\Big\{\frac{1}{2}\rho_s(\mathbf{v}_s - [\vec{\omega}, \mathbf{r}])^2 - \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{l}, \mathbf{v}_s - [\vec{\omega}, \mathbf{r}])^2 +$$

$$+ C(\mathbf{v}_s - [\vec{\omega}, \mathbf{r}], \operatorname{rot}\mathbf{l}) - C_0(\mathbf{l}, \mathbf{v}_s - [\vec{\omega}, \mathbf{r}])(\mathbf{l}, \operatorname{rot}\mathbf{l}) + \frac{1}{2}K_1(\operatorname{div}\mathbf{l})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}K_2(\mathbf{l}, \operatorname{rot}\mathbf{l})^2 + \frac{1}{2}K_3[\mathbf{l}, \operatorname{rot}\mathbf{l}]^2\Big\} - \frac{1}{2}\rho\int d^3\mathbf{r}\,[\vec{\omega}, \mathbf{r}]^2. \qquad (1)$$

Здесь ρ – полная плотность жидкости; величины ρ_0, mC, mC_0 и $m^2K_{1,2,3}$ имеют порядок ρ_s. В нормальной жидкости подобный функционал минимизируется полем скоростей $\mathbf{v} = [\vec{\omega}, \mathbf{r}]$. В He II такое поле $\mathbf{v}_s$ невозможно в силу равенства $\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = 0$ в объеме жидкости. Минимум здесь обеспечивается решеткой вихревых нитей, которая при достаточно большой $\omega >> (mR^2)^{-1}$, где R – радиус сосуда, имитирует поле $[\vec{\omega}, \mathbf{r}]$ в среднем. Сверхтекучая скорость вблизи каждой нити имеет особенность $v_s = 1/mr$ ($\hbar = 1$), что дает проигрыш в энергии по сравнению с твердотельным вращением

$$\Delta\widetilde{F} = (\pi\rho_s\omega R^2/2m)\ln(r_c/\xi), \qquad (2)$$

где r_c – размер ячейки, а ξ – радиус остова вихря. В ^{3}He – A также в принципе возможна такая структура, состоящая из вихревых нитей с особенностями в $\mathbf{v}_s$. Для этих вихрей $\mathbf{l} \parallel \vec{\omega}$, а проигрыш в энергии по-прежнему будет определяться (2), где теперь ξ – радиус когерентности.

Мы покажем, что в ^{3}He – A осуществляется структура своеобразных вихрей, которая также имитирует поле сверхтекучих скоростей $[\vec{\omega}, \mathbf{r}]$ в среднем, но оказывается энергетически более выгодной, чем (2), так как ее сверхтекучая скорость не имеет особенностей и проигрыш в энергии поэтому не содержит логарифмического вклада: $\Delta\widetilde{F} \sim \rho_s \omega R^2/m$. Это обусловлено тем, что rot $\mathbf{v}_s \neq 0$, а удовлетворяет условию [1]

$$(\mathrm{rot}\ \mathbf{v}_s)_i = \frac{1}{4m} e_{ijk}\left(\mathbf{l}, \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_k}\right]\right). \tag{3}$$

Это выражение является следствием того, что параметр порядка в ^{3}He $-A$ задается тройкой ортов $\vec{\Delta}'$, $\vec{\Delta}''$, $\mathbf{l}$, ориентацию которых относительно системы координат с осью z вдоль $\vec{\omega}$ можно описать, например, тремя углами Эйлера α, β, γ. Так для $\mathbf{l}$ и $\mathbf{v}_s$ имеем

$$\mathbf{l} = (\sin\beta \cos\alpha;\ \sin\beta \sin\alpha;\ \cos\beta),$$

$$\mathbf{v}_s = \frac{1}{2m}\left[(1-\cos\beta)\nabla\alpha + \nabla\Phi\right]; \quad \Phi = -(\alpha+\gamma). \tag{4}$$

Углы α и β задают положение $\mathbf{l}$ на единичной сфере. В силу однородности вдоль оси z все величины зависят только от $\mathbf{r} = (x, y)$, а $\mathbf{v}_s$ лежит в плоскости (x, y).

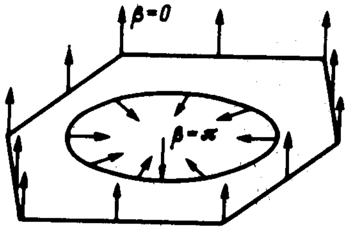
Минимум $\widetilde{F}$ будет достигаться тогда, когда $\mathbf{v}_s$ близко к $[\omega, \mathbf{r}]$. Для этого необходимо, чтобы интеграл от rot $\mathbf{v}_s$ по любой макроскопической области S такой, что $S >> (m\omega)^{-1}$, почти полностью компенсировался членом $2\omega S$. Оставляя лишь главные члены по $m\omega S >> 1$, получим (см. (3))

$$\frac{1}{2}\int_S e_{ijk}\left(\mathbf{l}, \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_k}\right]\right) dS_i = 4m\omega S >> 1. \tag{5}$$

С этой же точностью можно считать, что левая часть (5) равна $4\pi N$, где $N >> 1$ – целое число, и пренебречь влиянием границы сосуда. Величина $4\pi N$ равна площади на единичной сфере, которую заметает вектор $\mathbf{l}$ при пробегании $\mathbf{r}$ по S, так как левая часть (5) равна $\int \sin\beta d\beta d\alpha$. Из (1) и (5) ясно, что минимальность членов с производными от $\mathbf{l}$ в F достигается тогда, когда по любому направлению производные $|\partial l_i/\partial x_k| \sim (m\omega)^{1/2}$. Отсюда следует, что при обходе $\mathbf{r}$ по границе области S вектор $\mathbf{l}$ пробегает на единичной сфере замкнутую линию длиной $O(N^{1/2}) << N$. С точностью до главных членов по N это означает, что граница заметаемой на сфере области стягивается в точку, т. е. с этой точностью вектор $\mathbf{l}$ пробегает все значения на сфере N раз (с учетом направления обхода). Разобьем теперь S на такие ячейки S_a, $\sum_a S_a = S$, что при пробегании $\mathbf{r}$ по S_a вектор $\mathbf{l}$ обегает сферу один раз. Ясно, что характерные размеры ячеек, r_c, по любому направлению должны быть порядка $(m\omega)^{-1/2}$

Следует ожидать, что ячейки обладают периодичностью. В этом случае площадь каждой ячейки $S_0 = \pi/m\omega$. Легко видеть, что $\mathbf{v}_s - [\vec{\omega}, \mathbf{r}]$ также будет периодична и иметь порядок ωr_c. Ячейка в двумерной периодической решетке топологически эквивалентна поверхности тора.

Поскольку поле $\mathbf{l}$ дает отображение степени единица тора на сферу, ячейку можно выбрать таким образом, чтобы ее граница отображалась бы в одну точку на сфере. Следовательно, на границе такой ячейки $\mathbf{l} = \mathrm{const}$. Из симметрии задачи можно предположить, что на границе $\beta = 0$ или π (для определенности считаем, что $\beta = 0$). Из (3) следует, что циркуляция $\mathbf{v}_s$ по границе равна $2\pi/m$, а углы α и γ при обходе вокруг центра ячейки (точка, где $\beta = \pi$) меняются на -2π. Циркуляция $\mathbf{v}_s$ по линиям $\beta = \mathrm{const}$ равна $\pi/m(1 + \cos\beta)$ и уменьшается от $2\pi/m$ до нуля при движении от границы к центру. По-видимому, ячейки будут иметь наиболее симметричную форму, т. е. квадратную или гексагональную.



Одно из возможных полей вектора $\mathbf{l}$ в гексагональной ячейке

Условие гладкости $\vec{\Delta}'$, $\vec{\Delta}''$ и $\mathbf{l}$ на границе требует, чтобы $\partial\beta/\partial\mathbf{n} = 0$ ($\mathbf{n}$ – нормаль к границе), а $\nabla\Phi$ был непрерывен. Скорость $\mathbf{v}_s$ при этом оказывается непрерывной автоматически. Заметим, что если в (4) положить $\beta = 0$ всюду, то получается решетка вихревых линий с двумя квантами циркуляции, так как Φ меняется при обходе вокруг центра ячейки на 4π. Таким образом, исследуемую структуру можно получить из решетки вихрей с двумя квантами циркуляции, переходя непрерывно от постоянного поля $\mathbf{l} = \hat{\mathbf{z}}$ в поле, изображенное, например, на рисунке. При этом особенность на линии исчезает. Топологическая возможность такого перехода отмечена в [2]. Рассмотренное поле $\mathbf{l}$ в ячейке напоминает структуру, обсуждавшуюся в [1, 3].

Периодическую решетку можно наблюдать, например, методами ЯМР, так как частота ЯМР зависит от ориентации $\mathbf{l}$ относительно магнитного поля. При больших скоростях вращения, когда $r_c \sim \xi$, сверхтекучесть будет подавляться. Это явление аналогично H_{c2} в сверхпроводниках второго рода. Однако критическая угловая скорость вращения очень велика: $\omega_c \sim (m\xi^2)^{-1} \sim 10^5$ $сек^{-1}$.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22 ноября 1976 г.

Литература

[1] N.D.Mermin, T.-L.Ho. Rev. Mod. Phys., 47, 331, 1975.

[2] Г.Е.Воловик, В.П.Минеев. Письма в ЖЭТФ, 24, 605, 1976.

[3] В.Р.Чечеткин. ЖЭТФ, 71, 1463, 1976.