Письма в ЖЭТФ, том 25, вып. 1, стр. 116 – 119 *20 января 1977 г.*

РАСХОДИМОСТЬ РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПСЕВДОЧАСТИЦЫ

Л.Н.Липатов

Показано, что асимптотика коэффициентов разложения функции Гелл-Манна – Лоу в скалярных теориях вида $H_{int} = \phi^4/4!$ определяется сферически-симметричными решениями классических уравнений в эвклидовом 4-х мерном пространстве и квантовыми флуктуациями вблизи этих решений.

1. В последние годы возник интерес к точно решаемым нелинейным полевым классическим уравнениям [1]. Высказывается гипотеза, что наличие у них стационарных решений с конечной энергией (солитонов) свидетельствует в пользу появления в спектре соответствующей квантовой задачи стабильных состояний [2]. Найдены также нестационарные решения с конечным действием для Янг-Миллсовской модели в эвклидовом четырехмерном пространстве (так называемые псевдочастицы) [3]. Вопрос о следствиях для квантовой задачи, которые можно извлечь из существования нестационарных решений, в настоящее время остается открытым. В данной работе мы покажем на примере скалярных теорий с безразмерной константой связи, что степень расходимости ряда теории возмущений определяется сферически-симметричными решениями соответствующих классических уравнений в четырехмерном пространстве при отрицательном знаке константы связи. Точная оценка различных величин в высоких порядках теории возмущений представляет также практический интерес. Так например, в квантовой электродинамике точность измерения аномального магнитного

момента потребует в ближайщее время вычисления огромного количества диаграмм восьмого порядка теории возмущений. Можно надеяться, что методы, развитые в данной работе, могут быть обобщены на случай квантовой электродинамики.

2. Рассмотрим скалярную теорию в D-мерном эвклидовом пространстве-времени с гамильтонианом

$$H = \int d^D x \left[\frac{(\partial_\nu \phi)^2}{2} + g_\mu \frac{\phi^n}{n!} \right] + \int d^D x \mathcal{H}'(\phi, g_\mu), \tag{1а}$$

причем для перенормируемости теории положим

$$D = 2n/(n-2), \qquad n = 4,6 \ldots, \qquad g_\mu > 0. \tag{1б}$$

Константа g_μ есть значение инвариантного заряда

$$g(p^2/\mu^2, g_\mu) \equiv g_\mu \Gamma_n (p^2/\mu^2, g_\mu) d^{n/2}(p^2/\mu^2, g_\mu) \tag{2}$$

в точке нормировки $p^2 = p_\mu^2 = \mu^2$, где $\Gamma_n = d = 1$. Вершинная функция $\Gamma_n (p^2/\mu^2, g_\mu)$ вычисляется в симметричной пространственно-подобной точке $p_i^2 = p^2 > 0$, $p_i p_j|_{i \neq j} = -(p^2/n-1)$, функция $\Delta(p) = p^{-2} d(p^2/\mu^2, g_\mu)$ есть функция Грина скалярной частицы. Контр-член $\mathcal{H}'$ в формуле (1а) предназначен для удаления ультрафиолетовых расходимостей в поддиаграммах с числом хвостов $m \leqslant n$:

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2} \Delta^\circ(0) g_\mu \frac{\phi^{n-2}(x)}{(n-2)!} + g_\mu^2 \frac{\phi^n(x)}{\left(\frac{n}{2}!\right)^3} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \pi^{-(D/2)} \right)^{n/2} \times$$

$$\times \int \frac{d^D x}{x^D} \exp\left(i \frac{n x p_\mu}{\sqrt{n-1}} \right) + \ldots . \tag{3}$$

В данной работе будет найдено асимптотическое поведение при $K \to \infty$ коэффициентов разложения $C_k(n)$ функции Гелл-Манна – Лоу

$$\psi(g(p^2/\mu^2, g_\mu)) = \frac{\partial g(p^2/\mu^2, g_\mu)}{\partial \ln p^2/\mu^2} = \sum_{k=2}^{\infty} (-g(p^2/\mu^2, g_\mu))^k C_k(n). \tag{4}$$

В классе теорий (1а), (1б) физический интерес представляют модели с $n=4$, $D=4$ [4] и $n = 6$, $D = 3$ [5]. В пределе $n \to \infty$ коэффициенты $C_k(n)$ были найдены в предыдущей работе автора в произвольном порядке теории возмущений [6].

3. В высоких порядках главный вклад в инвариантный заряд (2) дают поправки к вершинной части Γ_n. Для их вычисления следует найти

k-тый порядок разложения n-хвостной функции Грина:

$$G_n^{(k)} = I_0^{-1} \int \prod_x d\phi(x) \oint \frac{dg_\mu}{g_\mu^{k+1} 2\pi i} \prod_{r=1}^{n} \phi(x_r) e^{-H}, \quad I_0 = \int \prod_x d\phi(x) e^{-H_0}. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что при $k \to \infty$ в функциональном интеграле (5) имеется набор перевальных значений для $\phi(x)$ и g_μ:

$$\tilde{\phi}(x) = \pm\sqrt{k}\left(\frac{y}{y^2 + (x - x_0)^2}\right)^{\frac{D}{2}-1} \frac{\sqrt{2}}{D-2} \pi^{-\frac{D}{4}} \left\{\frac{\Gamma(D)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\right\}^{1/2},$$

$$-\tilde{g}_\mu = k^{-\frac{n-2}{2}} n! \left[\frac{8\pi}{(n-2)^2}\right]^{n/2} \left\{\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D)}\right\}^{\frac{n-2}{2}}. \tag{6}$$

С точки зрения фейнмановской диаграммной техники этот факт означает существование перевальной плотности распределения $\tilde{\rho}(x) = -\tilde{g}_\mu \frac{\tilde{\phi}^n}{n!}$ для точек взаимодействия в k-том порядке теории возмущений.

Суммирование в формуле (5) по вкладам перевалов с различными центрами x_0 и масштабами y осуществляется стандартным методом. Вычисление квантовых флуктуаций вблизи перевальных значений (6) производится путем диагонализации квадратичной формы по малым отклонениям $\Delta\phi$ и Δg_μ, возникающей при разложении H. При этом контрчлен $\mathcal{H}'(\tilde{\phi}, \tilde{g}_\mu)$ ликвидирует возникающие ультрафиолетовые расходимости.

После удаления внешних функций Грина из $G_n^{(k)}$ и перехода к вершинной функции Γ_n в импульсном пространстве мы получаем с использованием формул (2) и (4) следующее выражение для асимптотики коэффициентов $C_k(n)$:

$$\lim_{k\to\infty} C_k(n) = (-\tilde{g}_\mu)^{-k} e^{k\left(1-\frac{n}{2}\right)} k^{\frac{n+D}{2}} \left\{2^{1+\frac{D}{2}} \pi^{\frac{1}{4}(D-1)} \left[\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\right]^{-1} \left[\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\right]^{1/2}\right\}^n \times$$

$$\times (4\pi)^{-1/2} \left\{\frac{D(D+2)}{4\pi(D+1)}\right\}^{\frac{D+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty} (D+2m-1)\frac{\Gamma(D+m-1)}{\Gamma(D)\Gamma(m+1)} \times\right.$$

$$\left.\times \left[\ln(1-\beta_m) + \beta_m\right] - \frac{D^2/2}{D-2}\right\}, \quad \beta_m = \frac{D(D+2)}{(D+2m)(D+2m-2)}$$

при $n \geqslant 6$ и

$$\tilde{C}_k \equiv \lim_{k\to\infty} C_k(4) = \left(\frac{k}{e\,16\pi^2}\right)^k k^4 \exp(3c_E - 8) 2^{19/2} 3^4 5^{-5/2} \pi \int_0^\infty dy\, y^6 [K_1(y)]^4 \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{2m+3}{a_m}\left[\ln(1-a_m)+a_m+\frac{a_m^2}{2}\right]\right\}\approx\left(\frac{k}{e\,16\pi^2}\right)^k 2{,}75k^4, \qquad (7)$$

$$c_E\approx 0{,}5772,\quad K_1(\gamma)=\gamma^{-1}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}\cos(x\gamma),\quad a_m=\frac{C}{(m+1)(m+2)}$$

для случая теории с $H_{int}=g_\mu\int d^4x\,\phi^4/4!$.

Можно проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} C_k(n)$ (см. (5)) совпадает о асимптотикой при $k\to\infty$ коэффициентов $C_k(n)$, полученных в предыдущей работе для случая больших n [6].

Как быстро наступает асимптотика? Сравним три первых коэффициента функции Гелл-Манна – Лоу, полученных путем прямых вычислений диаграмм Фейнмана [4] с их значениями, полученными по асимптотической формуле (6) ($C_k(4)=(16\pi^2)^{-k+1}A_k$):

$$\begin{array}{lll} A_2=3/2, & A_3=17/6, & A_4=19{,}2 \\ \tilde{A}_2=0{,}15, & \tilde{A}_3=1{,}89, & \tilde{A}_4=20{,}9 \end{array} \qquad (8)$$

Таким образом, асимптотика наступает быстро, что позволяет надеяться на то, что поправочные члены $\sim 1/K$ к формуле (6), которые также могут быть вычислены, имеют аномально малый коэффициент. Этот факт вселяет надежду на возможность независимой проверки результата работы [6] о существовании ультрафиолетовой стабильной точки в скалярной теории. На очереди стоит задача вычисления функции Гелл-Манна – Лоу в теории Янга-Миллса и в квантовой электродинамике.

Автор благодарен А.А.Белавину, А.П.Бухвостову, В.Н.Грибову, А.М.Полякову, А.С.Шварцу и Д.В.Ширкову за полезные обсуждения.

Институт ядерной физики
им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 июля 1976 г.
После переработки
3 ноября 1976 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров, С.В.Манаков. ТМФ, 19, 336, 1974; Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 21, 160, 1975.

[2] А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, 430, 1974; S.Weinberg. Phys. Rev. Д11, 2088, 1975.

[3] А.А.Белавин, А.М.Поляков, А.А.Шварц, Ю.С.Тюпкин. 59, 85, 1975.

[4] В.В.Белокуров, А.А.Владимиров, Д.И.Казаков, А.А.Славнов, Д.В.Ширков. ТМФ, 19, 149, 1974; Г.М.Авдеева, А.А.Белавин. Письма в ЖЭТФ, 18, 611, 1973.

[5] А.А.Мигдал. ЖЭТФ, 59, 1015, 1970.

[6] Л.Н.Липатов. Письма в ЖЭТФ, 24, 179, 1976.