Письма в ЖЭТФ, том 25, вып. 2, стр. 132 – 136 *20 января 1977 г.*

НОВАЯ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНАЯ СИСТЕМА С ТОЧНЫМИ МНОГОСОЛИТОННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Б.С.Гетманов

Найдено лоренц-инвариантное уравнение для скалярного комплексного поля в двумерном пространстве-времени, для которого получены точные двухсолитонные решения, тривиально обобщающиеся на случай N солитонов.

Значительно возросший в последнее время интерес к классическим локализованным решениям уравнений теории поля связан, в частности, с возможностью построения новых моделей частиц [1]. В более хорошо изученном двумерном случае наряду с вполне интегрируемыми системами с тривиальной динамикой [2] существуют системы, взаимодействие солитонов в которых является неупругим [3, 4]. Такие системы, на наш взгляд, представляют более адэкватную основу для построения реалистичных моделей протяженных частиц; однако изучение таких систем затруднено отсутствием регулярных методов аналитического описания. С другой стороны, ценность точно решаемых вполне интегрируемых уравнений состоит, в частности, в возможности описывать с их помощью в первом приближении взаимодействие солитонов в "близких" к ним "неупругих" системах. Продуктивность этой концепции была продемонстрирована в [5]. В настоящей работе предложена система с группой симметрии, для которой найдены точные многосолитонные решения, "близостью" к этой системе можно объяснить свойства взаимодействия солитонов нелинейного комплексного уравнения Клейна –Гордона [4].

Рассмотрим теорию комплексного скалярного поля в двумерном пространстве -времени с лагранжианом

$$L = \frac{|\psi_\mu|^2}{1-\lambda^2|\psi|^2} - m^2|\psi|^2 \qquad (|\psi_\mu|^2 = \partial^\mu\psi\,\partial_\mu\psi^* ;$$

$$\mu = 0,1; \quad x_1 = x; \quad x_0 = t; \quad \psi_0 = \psi_t; \quad \psi_1 = \psi_x; \quad g_{00} = -g_{11} = 1). \tag{1}$$

Уравнение движения

$$\partial_\mu^2\psi + \lambda^2\psi^*\frac{\psi_\mu^2}{1-\lambda^2|\psi|^2} + m^2\psi(1-\lambda^2|\psi|^2) = 0 \tag{2}$$

имеет односолитонное решение, которое нам удобно записать в следующем виде:

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\,\frac{e^{z}}{1+ae^{z+z^*}}\,. \tag{3}$$

Здесь

$$z = z' + iz'' = k_\mu (x - x^{(o)})^\mu \tag{4}$$

— лоренц-инвариантная комплексная переменная, k_μ — комплексный пространственно-подобный вектор в двумерном псевдоевклидовом пространстве -времени:

$$k_\mu^2 = k_o^2 - k_1^2 = -m^2 ; \tag{5}$$

$a = [(k + k^*)_\mu^2]^{-1}$; $x_\mu^{(o)}$ – произвольный постоянный вектор, $x_\mu^{(o)} = 0$ фиксирует положение солитона в начале координат псевдоевклидова пространства. Комплексный вектор k_μ характеризуется четырьмя параметрами, из которых в силу (5) только два независимы; удобен следующий выбор k_μ:

$$k_o = m\,\mathrm{sh}(\beta \pm ia); \qquad k_1 = m\,\mathrm{ch}(\beta \pm ia). \tag{6}$$

Полагая $\mathrm{ch}\,\beta = \gamma$, $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, $\cos a = A$, $|A| \leqslant 1$, решение (3) можно переписать в следующем более привычном виде:

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sech}\, z' \exp(\pm iz'') =$$

$$= \lambda^{-1} A\, \mathrm{sech}[Am\gamma(x - vt) + \delta_1] \exp\{\pm i [\sqrt{1 - A^2}\, m\gamma(vx - t) + \delta_2]\};$$

$$\delta_1 - \delta_2 = \ln 2A. \tag{7}$$

Очевидно, v имеет смысл скорости солитона, A характеризует амплитуду, "ширину" солитона и частоту собственных колебаний.

Отметим, что точно такой же вид имеет односолитонное решение нелинейного уравнения Клейна – Гордона

$$\partial_\mu^2 \psi + m^2 (1 - 2\lambda^2 |\psi|^2)\, \psi = 0, \tag{8}$$

и в этом смысле уравнения (2) и (8) являются "близкими".

Интегралы движения – энергия E, импульс $\mathbf{p}$ и заряд Q – на решении (7) имеют вид

$$E = \gamma M; \qquad \mathbf{p} = \gamma v M; \qquad M = 4Am\lambda^{-2}; \quad E^2 = \mathbf{p}^2 + M^2; \tag{9}$$

$$Q = \pm 4 \arcsin A = \pm \bar{Q} \tag{10}$$

(знак заряда соответствует знакам перед мнимой единицей в (4), (7)). Итак, решения (7) представляют объекты, обладающие свойствами релятивистских частиц с массой M, зарядом $\pm\bar{Q}$, характерным размером $L \sim 2/Am\gamma$ (испытывающим лоренцово сокращение при движении) и имеющие внутреннюю степень свободы, описываемую параметром A (или a).

Можно показать, что решение (7) устойчивы во всей области изменения параметра A. Это связано, в частности, с тем, что M и Q (9), (10) как функции A не имеют экстремумов (для уравнения (8) аналогичные величины экстремальны в точке $A = \sqrt{2}/2$, в которой происходит потеря устойчивости) [4, 6].

В численных экспериментах наблюдалось полностью упругое рассеяние солитонов (7) при столкновениях. Этот факт, а также то, что в действительном пределе уравнение (2) преобразованием $\phi = 2\arcsin\psi$ сводятся к уравнению "sine-Gordon" для функции ϕ, дает основание предполагать, что уравнение (2) имеет точные многосолитонные решения. Нам удалось найти точное двухсолитонное решение методом Хироты [7]; тривиальное обобщение этого решения представляет собой N-солитонную формулу.

Будем искать решение (2) в виде:

$$\psi = g(x,t)/f(x,t), \tag{11}$$

где f – действительная функция.

Решениями весьма громоздкого уравнения для g и f являются, в частности, решения значительно более простой системы уравнений:

$$f\partial_\mu^2 f - (\partial_\mu f)^2 + |g|^2 = 0$$

$$(\partial_\mu^2 g + g)(f^2 - |g|^2) - 2f\partial_\mu f\,\partial_\mu g + g^*(\partial_\mu g)^2 + g(\partial_\mu f)^2 = 0 \tag{12}$$

(постоянные m и λ убраны преобразованием подобия $mx_\mu \to x_\mu$, $\lambda\psi \to \psi$). Введем величины

$$a(i,j^*) = -[(k_{(i)} + k^*_{(j)})^2_\mu]^{-1}; \quad a(i,j) = -(k_{(i)} - k_{(j)})^2_\mu; \quad a(i^*,j) = [a(i,j^*)]^*;$$

$$a(i^*,j^*) = [a(i,j)]^*; \quad a(i,j,k^*) = a(i,j)a(i,k^*)a(j,k^*);$$

$$a(i,j,m^*,n^*) = a(i,j)a(i,m^*)a(i,n^*)a(j,m^*)a(j,n^*)a(m^*,n^*), \tag{13}$$

где $k_{(i)\mu}$ определены (6), $k_{(i)\mu} \neq k_{(j)\mu}$ при $i \neq j$. Прямой проверкой можно убедиться в том, что g и f, определенные формулами:

$$g = e^{z_1} + e^{z_2} + a(1,2,1^*)e^{z_1+z_2+z_1^*} + a(1,2,2^*)e^{z_1+z_2+z_2^*}, \tag{14}$$

$$f = 1 + a(1,1^*)e^{z_1+z_2^*} + a(1,2^*)e^{z_1+z_2^*} + a(2,1^*)e^{z_2+z_1^*} + a(2,2^*)e^{z_2+z_2^*} +$$

$$+ a(1,2,1^*,2^*)e^{z_1+z_2+z_1^*+z_2^*}, \tag{15}$$

где $z_i = k(i)_\mu (x - x_i^{(0)})^\mu$, удовлетворяют системе (12).

Следовательно, формулы (11), (13) – (15) дают решение (2), описывающее рассеяние двух солитонов. Параметры, определяющие i-й солитон, "спрятаны" в переменной z_i. Обобщение (13) – (15) на случай $N > 2$ достаточно очевидно.

В пределе $t \to \pm \infty$ полученное решение распадается на сумму двух решений вида (7) с легко вычисляемыми сдвигами фаз.

Полагая параметры β_i (6) комплексными, мы получаем выражение, описывающее связанное состояние двух солитонов. Приведем явный вид выражения, описывающего связанное состояние солитонов с одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами в системе покоя ($a_1 = -a_2 = a$; $\beta_1 = -\beta_2 = i\xi$):

$$\psi = \cos\xi \cos a \sin(a+\xi)\, e^{\sin a \sin \xi x}\, \tilde{g}/\tilde{f};$$

$$\tilde{g} = e^{-\cos a \cos \xi x - \delta_1} \cos[\sin(a+\xi)t] - e^{\cos a \cos\xi x + \delta_1} \cos[\sin(a-\xi)t$$

$$\tilde{f} = \cos^2\xi \cos^2(\sin\xi \cos a\ t) - \cos^2 a \sin^2(\cos\xi \sin at) + \tag{16}$$

$$+ \operatorname{sh}(\cos a \cos \xi x + \delta_2)(\cos^2\xi - \cos^2 a);$$

$$\delta_1 = \ln \frac{\sin(a+\xi)}{2\cos a \cos\xi}; \qquad \delta_2 = \ln[\sqrt{\sin^2 a - \sin^2\xi}/2\cos a \cos\xi].$$

Замечательно, что *в обоих* предельных случаях $a = 0$ или $\xi = 0$ выражение (16) имеет вид $\psi = \sin \phi/2 = \sin 2 \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}\theta \operatorname{sech}(\cos\theta x)\sin(\sin\theta t)]$ ($\theta = \xi$ или $\theta = a$ соответственно); ϕ есть "бион" уравнения "sine-Gordon" [8].

Опыт изучения уравнений, имеющих точные многосолитонные решения, показывает, что они обладают бесконечным набором интегралов движения и, вероятно, все являются вполне интегрируемыми системами. Можно надеяться, что предложенная система обладает аналогичными свойствами.

Автор выражает благодарность В.Г.Маханькову, Я.А.Смородинскому и Д.В.Ширкову за полезные обсуждения.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
29 ноября 1976 г.

Литература

[1] И.С.Шапиро. ЖЭТФ, 70, 2050, 1976; Extended systems in field theory". Phys. Rep., 23C, 1976.

[2] В.Е.Захаров. В книге И.А.Кунина "Теория упругих сред с микроструктурой". М., изд. Наука, 1976 г.

[3] А.Е.Кудрявцев. Письма в ЖЭТФ, 22, 178, 1975; Б.С.Гетманов. Письма в ЖЭТФ, 24, 323, 1976.

[4] Б.С.Гетманов. ОИЯИ, Р2-10208, Дубна, 1976.

[5] Б.С.Гетманов. ОИЯИ, Р2-9996, Дубна, 1976; Phys. Lett., (to be (published).

[6] Л.Г.Заставенко. ПММ, 29, 430, 1965.

[7] R.Hirota. J.Phys. Soc. of Japan, 33, 1459, 1972.

[8] Л.Д.Фаддеев, Л.А.Тахтаджян. ДАН СССР, 219, 1234, 1974; P.J.Caudrey, J.C.Eilbeck, L.D.Gibbon. Nuovo Cim., 25B, 497, 1975.