Письма в ЖЭТФ, том 25, вып. 5, стр. 272 – 276 *5 марта 1977 г.*

ТОПОЛОГИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ВАКУУМАМИ

В.Л.Голо, М.И.Монастырский

Рассмотрены топологические инварианты калибровочных теорий с несколькими вакуумами (метастабильными состояниями). Дана групповая интерпретация фаз в ^3He.

Существование решений типа монополей [1, 2] для уравнений янг-милсовского типа, взаимодействующих со скалярным хиггсовским полем с $SU(2)$-симметрией связано с наличием топологического заряда. Для вычисления этого заряда оказалось удобным использовать аппарат гомотопических групп [3].

В теориях с более высокой группой симметрии возникают другие топологические инварианты, позволяющие классифицировать возникающие решения[1)]. В настоящей работе топологическими методами анализируются калибровочные уравнения с компактной группой симметрии. В частности, с этой точки зрения рассмотрены уравнения Гинзбурга – Ландау для ^{3}He.

1. Рассмотрим Лагранжиан янг-милсовского типа с компактной калибровочной группой G

$$L = \tfrac{1}{2} \mid D_\mu \phi \mid^2 - \tfrac{1}{4} \mathbf{F}^2 - V(\phi), \tag{1}$$

где $D_\mu \phi$ – ковариантная производная:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ig \mathrm{A} \mathrm{T} \phi \tag{2}$$

здесь T – оператор изоспина, A – калибровочное поле, $\mathbf{F}$ – кривизна поля A. Потенциал $V(\phi)$ – инвариантен относительно действия группы G.

Будем предполагать, что поле ϕ имеет ненулевое вакуумное среднее (спонтанное нарушение).

Многообразием вакуумов называется множество минимумов потенциала $V(\phi)$.

Калибровочная группа G действует транзитивно на вакуумном многообразии Θ. Следовательно, многообразие Θ можно представить в виде фактор – пространства G/H, где H – стационарная группа фиксированного вектора $|\Psi>$ [5].

2. Как известно, возможно существование нескольких различных вакуумов в физическом пространстве. Представления о "доменной" структуре вакуума рассматривались в ряде работ [6]. В нашем случае под доменом понимается область в пространстве Минковского или в Эвклидовом пространстве R^n, а полевые переменные принимают значения в одном из вакуумных многообразий. Тот факт, что компоненты поля могут принимать значения в однородных пространствах соответствует киральности теории [7, 8]

В известной одномерной (x, t) скалярной теории с потенциалом $V(\phi) = -\mu^2/2\ \phi^2 + 2\phi^4 (\lambda, \mu^2 > 0)$ существуют решения (кинки, доменные стенки) ϕ с асимптотиками $\phi(x) = \mu/\sqrt{\lambda}\ (x \to +\infty)$, $\phi(x) \to -\mu/\sqrt{\lambda}\ (x \to -\infty)$. Решение имеет вид $\phi(x) = (\mu/\sqrt{\lambda}) \mathrm{th}\, (\mu x/\sqrt{2})$.

С нашей точки зрения это означает существование двух вакуумов в изотопическом пространстве. В данном случае вакуумы это точки $\mu/\sqrt{\lambda}$, $-\mu/\sqrt{\lambda}$, а само решение с такими асимптотиками переводит один вакуум в другой. В общем случае сами вакуумы могут быть топологически не эквивалентны.

---

1) Отметим, что особенности решений уравнения Гинзбурга – Ландау для ^{3}He изучались методом гомотопических групп в [4].

Пусть R^3 – физическое пространство, Ω_i – области в R^3 с границами $\partial\Omega_i$. Будем называть Ω_i, следуя нашей физической аналогии, доменами.

Существуют два типа отображений доменов в изотопическое пространство J. Первый тип отображений f связан лишь с заданием асимптотических значений на границе домена $\partial\Omega_i$. Например, в решениях типа монополей в уравнении с $SU(2)$-симметрией [1, 2] отображение f есть отображение сферы $S^2 \subset R^3$ в сферу S^2, расположенную в изотопическом пространстве $SU(2)$.

Другой пример – отображение всего домена Ω можно наблюдать в ^{3}He. Здесь отображение области, заполненной одной из фаз $\Omega \subset R^3$ задается матрицей порядка A_{pi} на один из вакуумов в изотопическом пространстве комплексных 3Х3 матриц.

В общем случае имеем: n-мерные области $\Omega_1^n \ldots \Omega_k^n$ в R^n с границами $\partial\Omega_1^{n-1}, \partial\Omega_2^{n-1}, \ldots \partial\Omega_k^{n-1}$ $n-1$-мерными гладкими многообразиями. Поле ϕ определяет отображение $f: R^n \to J$, такое, что границы $\partial\Omega_i$ переходят в вакуумные многообразия $V_1, \ldots V_e$

$$f: (\partial\Omega_1 \ldots \partial\Omega_k) \to (V_1, \ldots V_e). \tag{3}$$

Классификация этих отображений позволяет установить топологические критерии существования определенного типа решений.

Рассмотрим пример, когда многообразие вакуумов – произведение двумерных сфер $S_1^2 \times S_2^2$. Такие вакуумы возможны, например, в теории 0(4)-симметрии. Пусть Ω_1, Ω_2 домены, F-отображение $R^3 \to J$, f_i-ограничения F на $\partial\Omega_i$, $f_i: \partial\Omega_i \to S_1^2 \times S_2^2$ $(i = 1, 2)$. Тогда не существует решений таких, что $\deg f_i$ на $S_i^2 = m \neq 0$, а на $S_j^2 \deg f_i = 0$ ($j \pm i$ $\deg f_i$ – степень отображения).

Топологические типы границ вакуумных многообразий могут быть весьма различными. Например, в трехмерном случае, одни из них могут быть двумерными сферами, другие торами и т. п.

3.Применим эти общие соображения к теории Гинзбурга – Ландау ^{3}He. С математической точки зрения ее можно рассматривать как матричную полевую теорию $A_{pi}(x)$ с лагранжианом L [9].

$$L = \sum_p \left\{ \frac{k_1}{2} \mid \operatorname{div} A_p \mid^2 + \frac{k_2}{2} \mid \operatorname{rot} A_p \mid + \frac{Q}{2} \left[A_p \operatorname{rot} A_p^* + A_p^* \operatorname{rot} A_p \right] \right\} + V(A), \tag{4}$$

где потенциал $V(A)$ имеет вид

$$V(A) = \alpha Tr(AA^+) + \beta_1 \mid Tr(AA^T) \mid^2 + \beta_2 \mid Tr(AA^+) \mid^2 + \beta_3 Tr \times$$

$$\times \{ (AA^+)(AA^T)^* \} + \beta_4 Tr \{ (AA^+)^2 \} + \beta_5 Tr \{ (AA^+)(AA^+)^* \}. \tag{5}$$

$$(A^T_{ij} = A_{ji}, \quad (A^*)_{ij} = A^*_{ij}, \quad A^+ = A^{*T}.$$

Переменные поля – компоненты функции порядка. Можно показать, что существуют следующие калибровочные преобразования потенциала

$$A_{pi} = R_{pm} R_{in} e^{i\phi} A_{mn} \tag{6}$$

(по повторяющимся индексам суммирования)

Матрицы R_{pm}, R_{in}, $e^{i\phi}$ образуют калибровочную группу

$$H = SO_1(3) \times SO_2(3) \times U(1).$$

Структура группы H связана с триплетной структурой сверхтекучей жидкости.

Из наших рассмотрений следует, что многообразиями минимумов потенциала $V(A)$, соответствующих различным фазам в ^{3}He могут быть лишь однородные пространства группы H. Они имеют следующий вид:

$$V_A = S^2 \times SO(3), \quad V_B = SO(3) \times U(1), \quad V_{A_1} = SO(3),$$

$$V_C = S^2 \times S^2 \times S^1, \quad V = S^2 \times S^2, \quad V = S^2 \times S^1.$$

Первые два из них известные A, B фазы, третье – A_1 фаза. Физический смысл V_C не ясен.

Подчеркнем, что из групповой классификации однородных пространств следует перечисление всех возможных минимумов потенциалов $V(A)$, а, следовательно, и всех топологических типов вакуумных многообразий – фаз ^{3}He.

Топологические условия дают лишь необходимые условия для существования минимумов потенциала $V(A)$. Некоторые достаточные условия существования минимумов получены в [10].

С физической точки зрения существование топологически неэквивалентных состояний в системе соответствует энергетическому барьеру между ними. В частном случае решений типа монополя вопрос о существовании энергетического барьера между решениями с различными топологическими зарядами обсуждался ранее в [11].

Благодарим Г.Воловика и В.Минеева за полезное обсуждение работы.

Московский
государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
28 января 1977 г.

Литература

[1] G.t'Hooft. Nucl. Phys., B79, 276, 1974.

[2] А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, 430, 1974.

[3] М.И.Монастырский, А.М.Переломов. Препринт ИТЭФ №56, 1974; Письма в ЖЭТФ, 21, 94, 1975.

[4] Г.Е.Воловик, В.П.Минеев. Письма в ЖЭТФ, 24, 605, 1976.

[5] T.W.B.Kibble. Phys. Rev., 155, 1554, 1967.
[6] Я.Б.Зельдович, И.Ю.Кобзарев, Л.Б.Окунь. ЖЭТФ, 67, 3, 1974.
[7] T.H.R.Skyrme. Proc. Roy. Soc., A247, 260, 1958.
[8] L.D.Faddeev. CERN Pr. TH 2188, 1976.
[9] A.I.Legget. Rev. Mod. Phys., 47, №2, 1975.
[10] В.Л.Голо, М.И.Монастырский. Препринт ИТЭФ, 173, 1976.
[11] A.Patrasciou. Phys. Rev. D12, 523, 1975.