Письма в ЖЭТФ, том 28, вып.2, стр, 65 – 68 *20 июля 1978 г.*

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ УПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ

Г.Е.Воловик

Используется метод относительных гомотопических групп для классификации топологически устойчивых дефектов на границе упорядоченной системы. Рассматриваются поверхностные дефекты в нематиках и сверхтекучем He^3.

В последнее время методы топологии интенсивно используются для исследования различных неоднородных по пространству структур в упорядоченных системах. Гомотопические группы использовались для классификации сингулярностей в поле параметра порядка [1,2]. Относительные гомотопические группы использовались для классификации несингулярных топологически устойчивых солитонов и текстур в сосудах различной формы [3]. При этом в [3] предполагалось отсутствие поверхностных особенностей на границе сосуда. Однако такие особенности могут играть важную роль в динамике системы, например, движение "бужемов" по границе сосуда с He^3-A приводит к непрерывному затуханию персистирующего тока в кольце [4,5]. В [6] была сделана попытка классификации поверхностных дефектов, используя гомотопическую группу $\pi_1(\widetilde{R})$ для особых точек на поверхности и группу $\pi_0(\widetilde{R})$ для особых линий на поверхности, где $\widetilde{R}$ многообразие внутренних состояний системы на ее поверхности. Эта классификация однако, не совсем полна, и ниже будет показано, что особые точки на поверхности описываются относительной гомотопической группой $\pi_2(R,\widetilde{R})$ (R – многообразие внутренних состояний системы в объеме). В некоторых случаях, например в нематике, это приводит к дополнительным особым точкам, не описывающимся $\pi_1(\widetilde{R})$.

Топологический анализ, проведенный в [6], следующий. Особая точка на поверхности окружается контуром, который отображается в пространство $\widetilde{R}$ – область изменения параметра порядка на поверхности системы. $\widetilde{R}$ является подпространством области изменения параметра порядка в объеме R из-за того, что граничные условия сужают область изменения параметра порядка на границе. В [6] утверждается, что груп па $\pi_1(\widetilde{R})$ – классы отображений контура в $\widetilde{R}$ – описывает особые точки на поверхности. Однако среди элементов группы $\pi_1(\widetilde{R})$ могут быть элементы группы $\pi_1(R)$. Пусть a – такой элемент. Тогда контур, окружающий особую точку класса a не может быть непрерывно стянут в точку не только на поверхности системы , но также и в объеме. Следовательно, эта особая точка является концом особой линии, проходящей в объеме. Если рассматривать только изолированные особые точки, то нужно учитывать только те элементы из $\pi_1(\widetilde{R})$, которые соответствуют нулю в $\pi_0(R)$. Это значит, что нужно найти ядро гомоморфизма $\pi_1(\widetilde{R}) \to \pi_1(R)$.

Этот гомоморфизм имеет место, если контур, окружающий особую точку, переместить от поверхности вглубь системы.

Кроме особых точек, описывающихся группой

$$\ker n\ (\pi_1(\widetilde{R}) \to \pi_1(R)) \tag{1}$$

могут существовать на поверхности некоторые из особых точек, которые пришли из объема, но и на поверхности остались топологически устойчивыми.

Для классификации особых точек обоих типов окружим исследуемую особую точку полусферой, лежащей в объеме, с границей полусферы, лежащей на поверхности системы. Классы отображений этой полусферы в R, а ее границы в $\widetilde{R}$ образуют относительную гомотопическую группу $\pi_2(R,\widetilde{R})$. Элементы этой группы дают все классы особых точек на поверхности системы. Как известно из топологии, существует точная последовательность гомоморфизмов, связывающих эту группу с известными группами:

$$\pi_2(\widetilde{R}) \to \pi_2(R) \to \pi_2(R, \widetilde{R}) \to \pi_1(\widetilde{R}) \to \pi_1(R). \tag{2}$$

Из определения точной последовательности гомоморфизмов (образ любого из гомоморфизмов последовательности является ядром следующего гомоморфизма) следует, что в группе $\pi_2(R, \widetilde{R})$ есть нормальный делитель, изоморфный фактор-группе

$$\pi_2(R)/\mathrm{im}(\pi_2(\widetilde{R}) \to \pi_2(R)), \tag{3}$$

Здесь $\mathrm{im}(A \to B)$ обозначает образ гомоморфизма $A \to B$.

Причем фактор-группа группы $\pi_2(R,\widetilde{R})$ по этому нормальному делителю изоморфна группе (1). Во многих случаях группа $\pi_2(R, \widetilde{R})$ является просто прямым произведением групп (1) и (3). В этом случае в системе имеются: особые точки, описывающиеся группой (1); те из особых точек, пришедших из объема, которые остались топологически устойчивыми (они описываются группой (3)), а также комбинации обоих типов (они описываются произведениями элементов обеих групп).

В качестве примера рассмотрим нематик. Пространство параметра порядка в объеме:

$$R = S^2/Z_2, \quad \pi_2(R) = Z, \quad \pi_1(R) = Z_2.$$

Граничные условия требуют, чтобы вектор директора лежал в плоскости поверхности, поэтому

$$\tilde{R} = S^1/Z_2, \quad \pi_1(\tilde{R}) = Z, \quad \pi_2(\tilde{R}) = 0.$$

Рассматривая гомоморфизмы, которые имеют место при расширении пространства $\tilde{R}$ до R, получаем

$$\mathrm{kern}\,(\pi_1(\tilde{R}) \to \pi_1(R)) = Z.$$

Это дисклинации на поверхности с четным индексом Франка; как известно, в объеме они могут быть продеформированы в неособую конфигурацию. Далее

$$\pi_2(R)/\mathrm{im}(\pi_2(\tilde{R}) \to \pi_2(R)) = \pi_2(R) = Z.$$

То есть все особые точки топологически устойчивы в объеме и на границе. Таким образом относительная гомотопическая группа, описывающая все поверхностные особые точки в нематике,

$$\pi_2(R, \tilde{R}) = Z + Z. \tag{4}$$

В случае A-фазы He^3 с дипольным взаимодействием, где

$$R = SO_3, \quad \tilde{R} = S^1 \times Z_2, \quad \pi_2(R) = 0, \quad \pi_1(R) = Z_2, \quad \pi_2(\tilde{R}) = 0, \quad \pi_1(\tilde{R}) = Z$$

получается известный результат

$$\pi_2(R, \tilde{R}) = \mathrm{kern}(\pi_1(\tilde{R}) \to \pi_1(R)) = Z. \tag{5}$$

Особые точки на поверхности – "бужемы" – вихри с четным числом квантов циркуляции сверхтекучей скорости.

Аналогичным образом можно исследовать особые линии на поверхности системы. Соответствующая относительная группа для них $\pi_1(R,\tilde{R})$ определяется элементами группы

$$\mathrm{kern}\,(\pi_0(\tilde{R}) \to \pi_0(R))$$

и элементами фактор-группы

$$\pi_1(R)/\mathrm{im}(\pi_1(\tilde{R}) \to \pi_1(R)).$$

В случае нематика, где $\pi_0(R) = \pi_0(\tilde{R}) = 0$,

$$\pi_1(R, \tilde{R}) = \pi_1(R)/\pi_1(R) = 0.$$

Следовательно в нем нет устойчивых особых линий на поверхности. В случае He^3-A с дипольным взаимодействием, где $\pi_0(R) = 0$, $\pi_0(\tilde{R}) = Z_2$, получается также известный результат [6]

$$\pi_1(R, \tilde{R}) = \pi_0(\tilde{R}) = Z_2.$$

Это так называемые границы островов перевернутых l [4,5].

Дальнейшей задачей является исследование особых точек и линий на границе при учете внешних и внутренних полей, которые меняют область изменения параметра порядка и, следовательно, меняют классификацию топологически устойчивых дефектов и устанавливают различные уровни их стабильности, так как это было сделано для солитонов в [3].

В заключение хотелось бы поблагодарить П.В.Андерсона за присланный препринт [6], который стимулировал появление этой работы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 мая 1978 г.

Литература

[1] G.Toulouse, M.Kleman. J.de Phys., 37, L-149, 1976.

[2] Г.Е.Воловик, В.П.Минеев, Письма в ЖЭТФ, 24, 605, 1976.

[3] V.P.Mineyev, G.E.Volovik. "Planar and linear solitons in superfluid He^3". Preprint submitted to Phys. Rev. B in august 1977.

[4] P.W.Anderson, R.G.Palmer. In Quantum Fluids and Solids, ed. S.B.Trickey, E.Adams and J.Dussy. Plenum Corp., N.Y. 1977, p.23.

[5] N.D.Mermin. Surface singularities and Superflow in He^3-A, Sanibel Symposium on Quantum Fluids and Solids, 1977.

[6] D.L.Stein, R.D.Pisarski, P.W.Anderson. Boojums in superfluid He^3 and cholesteric liquid crystals, Submitted to Phys. Rev. Lett.