Письма в ЖЭТФ, том 28, вып.2, стр. 89 – 93 *20 июля 1978 г.*

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СВЕРХТЕКУЧЕГО ^{4}He

В.В.Лебедев, И.М.Халатников

Рассмотрена бездиссипативная гидродинамика вращающегося сверхтекучего ^{4}He. Введены канонические переменные, найдены выражения через них величин, описывающих систему. На основе гамильтоновой техники построены канонические уравнения движения. Выведена полная система нелинейных гидродинамических уравнений, найден явный вид законов сохранения.

Как известно, во вращающемся сверхтекучем ^{4}He ротор сверхтекучей скорости не равен нулю, что связано с наличием вихрей и приводит к необходимости обобщения гидродинамики сверхтекучего ^{4}He . Нелинейная гидродинамика для этого случая рассматривалась на основе законов сохранения Бекаревичем и Халатниковым [1]. Однако в уравнениях имелась неопределенность, связанная с наличием реактивного члена в уравнении для сверхтекучей скорости, эта неопределенность устранялась путем сравнения с результатами Холла и Вайнена [2]. В настоящей работе на основе гамильтонова формализма получены канонические уравнения вращающегося сверхтекучего ^{4}He .

В сверхтекучем ^{4}He имеются сверхтекучее и нормальное движения. С ними связаны соответственно сверхтекучая плотность импульса $\mathbf{j}$ и относительная нормальная плотность импульса $\mathbf{p}$, связанная с возбуждениями и исчезающая в пределе $T \to 0$. Полная плотность импульса

$$\mathbf{g} = \mathbf{j} + \mathbf{p}. \tag{1}$$

Галилеевским преобразованием из системы координат, в которой $\mathbf{j} = 0$, находим для плотности энергии

$$E = \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho} + \frac{\mathbf{j}\mathbf{p}}{\rho} + \epsilon(\mathbf{p}, \rho, s, \vec{\omega}), \tag{2}$$

где ρ – плотность массы, s – плотность энтропии, $\vec{\omega}$ – локальная угловая скорость, связанная с вихрями. Дифференциал плотности энергии имеет вид

$$dE = \frac{\mathbf{g}}{\rho} d\mathbf{j} + \mathbf{v}\, d\mathbf{p} + \mu\, d\rho + T\, ds + \vec{\lambda}\, d\vec{\omega}, \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ – нормальная скорость, T – температура, $\mu = -\dfrac{\mathbf{j}^2}{2\rho^2} - \dfrac{\mathbf{j}\mathbf{p}}{\rho^2} + \dfrac{\partial\epsilon}{\partial\rho}$ – химпотенциал. Давление

$$P = \frac{\mathbf{g}\mathbf{j}}{\rho} + \mathbf{v}\mathbf{p} + \mu\rho + \vec{\omega}\vec{\lambda} + sT - E \equiv \rho\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} + \mathbf{p}\left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}}{\rho}\right) + Ts + \vec{\omega}\vec{\lambda} - \epsilon. \tag{4}$$

Канонические уравнения гидродинамики сверхтекучего ^{4}He были выведены Покровским и Халатниковым [3, 4]. Для выписывания гамильтоновых уравнений надо знать структуру гамильтониана

$$\mathcal{H} = \int d^3 r\, H. \tag{5}$$

Плотность энергии E становится плотностью гамильтониана H, если все величины, от которых она зависит, выражаются через канонические переменные. В частности для невращающегося сверхтекучего ^{4}He [3, 4]

$$\mathbf{j} = -\rho\nabla\alpha \qquad \mathbf{p} = -s\nabla\beta - f\nabla\gamma. \tag{6}$$

Здесь (ρ, α), (s, β), (f, γ) – пары канонически сопряженных переменных. Последняя пара – переменные Клебша, необходимые для описания независимых компонент $\mathbf{p}$.

Из (6), видно, что $-\vec{\nabla}\alpha$ играет роль сверхтекучей скорости $\mathbf{v}^s$. Во вращающемся ^{4}He, где $[\vec{\nabla}, \mathbf{v}^s] \neq 0$, это выражение должно быть модифицировано. Мы исходим из аналогии со сверхпроводниками, где наличие вихрей связано с присутствием магнитного поля. Соответственно для вращающегося ^{4}He вводим "векторный потенциал" $\mathbf{a}$ так, что

$$\mathbf{v}^s = -\vec{\nabla}\alpha + \mathbf{a}. \tag{7}$$

Аналогом среднего магнитного поля сверхпроводников является

$$\vec{\omega} = [\vec{\nabla}\, \mathbf{a}] \equiv [\vec{\nabla}\, \mathbf{v}^s]. \tag{8}$$

Необходимо ввести также канонически сопряженную $\mathbf{a}$ переменную $\mathbf{d}$, являющуюся аналогом вектора электрического смещения. С вихрями связана плотность импульса, определяемая "вектором Пойнтинга". Его естественно включить в сверхтекучую плотность импульса, так как в отличие от импульса возбуждений, он не исчезает в пределе $T \to 0$. Окончательно[1])

$$\mathbf{j} = \rho\, \mathbf{v}^s - [\mathbf{d}, \vec{\omega}]. \tag{9}$$

Теперь все величины, от которых зависит E, выражены через канонические переменные, и мы можем выписать канонические уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a} \equiv -\vec{\nabla}\mathbf{g}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{a}} \equiv -\mathbf{g} - \left[\vec{\nabla}\left(\left[\mathbf{d}, \frac{\mathbf{g}}{\rho}\right] + \vec{\lambda}\right)\right], \tag{11}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \beta} \equiv -\vec{\nabla}(s\,\mathbf{v}), \tag{12}$$

$$\frac{\partial t}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \gamma} \equiv -\vec{\nabla}(f\,\mathbf{v}), \tag{13}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} \equiv \mu + \frac{\mathbf{g}}{\rho}\mathbf{v}^s, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{d}} \equiv \left[\frac{\mathbf{g}}{\rho}, \vec{\omega}\right], \tag{15}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta s} \equiv T - \mathbf{v}\vec{\nabla}\beta, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} \equiv -\mathbf{v}\vec{\nabla}\gamma. \tag{17}$$

---

[1]) Это выражение является калибровочно инвариантным, поэтому мы используем его вместо стандартного $-\rho\vec{\nabla}a - d_i\vec{\nabla}Q_i$, которое с учетом (19) отличается от (9) на полную дивергенцию

Из (14) следует уравнение переноса

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left[\vec{\nabla}\left[\frac{\mathbf{g}}{\rho}, \vec{\omega}\right]\right]. \tag{18}$$

К системе (10 – 17) необходимо добавить также аналог уравнения Максвелла

$$\vec{\nabla}\mathbf{d} = \rho, \tag{19}$$

которое является первым интегралом, как видно из (10), (11). С использованием (19) находим из (10 – 17)

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \vec{\nabla}_i (v_i\, \mathbf{p}) = - p_i \vec{\nabla} v_i - s\vec{\nabla} T \tag{20}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + \nabla_i \left(\frac{g_i}{\rho}\, \mathrm{j}\right) = - j_i \vec{\nabla} \frac{g_i}{\rho} - \rho\vec{\nabla}\mu + [\,[\vec{\nabla}\vec{\lambda}],\, \vec{\omega}\,]. \tag{21}$$

Уравнения (10), (12), (18), (20), (21) составляют полную систему уравнений гидродинамики вращающегося сверхтекучего ^{4}He . Эта система приводит к закону сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla} Q = 0, \tag{22}$$

где плотность потока энергии

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\mathbf{g}}{\rho}\,\mathrm{j}\right)\frac{\mathbf{g}}{\rho} + \mu\mathbf{g} + \left[\left[\omega, \frac{\mathbf{g}}{\rho}\right], \vec{\lambda}\right] + (\mathbf{p}\,\mathbf{v})\,\mathbf{v} + Ts\,\mathbf{v}. \tag{23}$$

Можно также сформулировать закон сохранения импульса

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \nabla_k \Pi_{ik} = 0, \tag{24}$$

где тензор напряжений

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + p_i\, v_k + j_i\, \frac{g_k}{\rho} - \lambda_i\, \omega_k. \tag{25}$$

Он является симметричным в силу инвариантности E относительно вращений.

Отметим, что в отличие от работы [1], мы имеем теперь независимые уравнения для $\vec{\omega}$, j . Соответственно увеличивается число кинетических членов в уравнениях, в частности, в отличие от [1], относительная скорость и $[\vec{\nabla}, \vec{\lambda}]$ входят в кинетические члены независимо.

Авторы благодарят Г.Воловика за стимулирующие дискуссии.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14 июня 1978 г.

Литература

[1] И.Бекаревич, И.М.Халатников. ЖЭТФ, **40**, 920, 1961.

[2] H.E.Hall, W.F.Vinen. Proc. Roy. Soc., A **238**, 204, 215, 1956

[3] В.Л.Покровский, И.М.Халатников. Письма в ЖЭТФ, **23**, 653, 1976.

[4] В.Л.Покровский, И.М.Халатников. ЖЭТФ, **71**, 1974, 1976.