Письма в ЖЭТФ, том 31, вып. 1, стр. 18 – 22 *5 января 1980 г.*

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ МОД РАЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДРЕЙФОВЫМИ ЭФФЕКТАМИ

А.А.Галеев, Л.М.Зеленый

В работе изучены собственные моды дрейфово-столкновительной тиринг (разрывной) неустойчивости. Показано, что учет малых поправок на взаимодействие тиринг-возмущений с ионно-звуковыми волнами ведет к исчезновению собственных решений.

В работах [1, 2] было показано, что конвективный отток энергии из области электронной диссипации тиринг-возмущений ведет к стабилизации дрейфовых тиринг-мод (аналогичный эффект известен теперь для дрейфовых волн [3 – 5]). Можно показать, что критерии стабилизации, полученные для бесстолкновительного случая [1] и полустолкновительного [2] в точности совпадают и по существу представляют собой учет энергии взаимодействия с ионно-звуковыми волнами в общем энергобалансе. Критерий стабилизации столкновительной моды дрейфовой тиринг-неустойчивости, полученный в [2] из тех же соображений, оказывается уже неверен. Как мы покажем ниже собственные моды этой ветви колебаний имеют совершенно другой характер, чем найденный в [6, 7] и использованный в [2] и поэтому исчезают уже при малых поправках на взаимодействие с ионным звуком.

Влияние столкновений мы учтем в простой модели соударительного члена Батнагара – Гросса – Крука. Система уравнений для возмущений скалярного ϕ и векторного A потенциалов имеет вид

$$\eta_i \frac{\rho_i^2}{2} \phi''_{xx} = \left(\phi - \frac{\omega A_{\parallel}}{k_{\parallel} c}\right) \left\{ \frac{k_{\parallel}^2 v_{Te}^2}{k_{\parallel}^2 v_{Te}^2 - 2 i \omega \nu_{ei}} \right\} \left[\overline{\delta\omega_e} - \eta_i \frac{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{2\omega^2} \right] = S, \quad (1)$$

$$\frac{\omega - \omega_*^e}{\omega} = \delta\omega_e, \qquad \frac{\omega - \omega_*^i}{\omega} \approx \eta_i = \frac{T_e + T_i}{T_i}; \quad k_{\parallel}(x) = \frac{\mathbf{kB}(x)}{\mathbf{B}},$$

$$A''_{xx} = \frac{2\omega_{pe}^2}{v_{Te}^2} \frac{\omega S}{k_{\parallel} c}. \quad (2)$$

Здесь: $\omega_* = \omega_*^e$ – электронная дрейфовая частота; ν_{ei} – частота электрон-ионных соударений; $\omega_*^i \approx -\omega_* T_e/T_i$; $\nu_{ei} >> \omega >> \nu_{ie} = \nu_{ei} m/M$; $\omega \sim \omega_* >> \mathrm{Im}\,\omega$; сингулярная поверхность $k_{\parallel} = 0$ совпадает с плоскостью $x = 0$; разложение для ионного вклада, использованное в (1) справедливо вплоть до расстояний $|x| < \delta_i = \omega_* / k'_{\parallel} v_{Ti}$; $k'_{\parallel} = \partial k_{\parallel}(x)/\partial x = k/L_s$, где L_s – характерная шировая длина.

Основной обмен энергии возмущений с электронами осуществляется внутри резистивной области $|x| < \delta_e = \sqrt{2\omega_* \nu_{ei}} / k'_{\parallel} v_{Te}$, а общее количество свободной энергии неустойчивости, запасенной в глобальной

конфигурации магнитного поля пропорционально известному в теории тиринг-моды параметру Δ', формально соответствующему скачку логарифмической производной внешнего решения на границах внутренней области. Дисперсионное уравнение при этом получается интегрированием уравнения для A''_{xx} через всю внутреннюю область (в предположении $A(x) \sim \text{const}$) и сшивкой логарифмической производной внешнего и внутреннего решений (см., например, [8, 9])

$$\Delta' = (A(0))^{-1} \int_{-R}^{+R} \frac{2\omega_{pe}^2}{v_{Te}^2} \frac{\omega}{k_{\parallel} c} S\,dx = \Delta_e + \Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)}, \quad R \to \infty \tag{3}$$

член Δ_e, который обычно только и учитывался раньше [6, 7], возникает при интегрировании электронного вклада в уравнение (2) с потенциалом $\phi^{(0)}$, определяемым электронным слагаемым в (1). Ионный вклад в уравнения (1) – (2), т. е. взаимодействие тиринг-моды с ионно-звуковыми колебаниями мы учтем в качестве возмущения. Это приведет к появлению добавки $\phi^{(1)}$ к потенциалу $\phi^{(0)}$ и в соответствии с этим двух дополнительных ионных слагаемых в (3).

$$\Delta_e = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{\omega_*}{\nu_{ei}} (-i\delta\overline{\omega}_e) \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + y_0 x)\,dx, \tag{4}$$

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{\omega_*}{\nu_{ei}} \frac{i\eta_i}{2} \frac{1}{\delta_i^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(1 + y_0 x)\,dx, \tag{5}$$

$$\Delta_i^{(2)} = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{\omega_*}{\nu_{ei}} \frac{i\eta_i}{2} \frac{1}{\delta_i^2 \delta^4} \int_{-\infty}^{+\infty} x y_1(x)\,dx, \tag{6}$$

$$y_0 = -\frac{k'_{\parallel} c \phi^{(0)}}{\omega_* A_{\parallel}}, \quad y_1 = \frac{2k'_{\parallel} c\, \delta_e^2 \rho_i^2 \delta_i^2}{i\omega A_{\parallel}} \phi^{(1)}, \quad \delta^4 = \frac{\delta_e^2 \rho_i^2 \eta_i}{i\delta\overline{\omega}_e},$$

$$\eta_i = 1 + \frac{T_e}{T_i}.$$

Потенциалы y_0 и y_1 удовлетворяют при этом следующим уравнениям:

$$y_0'' - y_0 x^2/\delta^4 = x\delta^{-4}, \tag{7}$$

$$y_1'' - y_1 x^2 \delta^{-4} = x^3(1 + y_0 x). \tag{8}$$

Параметр δ определяет характерную длину изменения продольного электрического поля [8] и в рассматриваемом случае столкновительной моды должен быть мал по сравнению с δ_e.

Решение уравнения (7) можно представить в виде суммы частного и общего решения

$$y_0(x/\delta) = \frac{-x}{2\delta^2}\int_0^{\pi/2} d\theta\sqrt{\sin\theta}\, e^{\frac{-x^2\cos\theta}{2\delta^2}} + C_1\sqrt{\frac{x}{\delta}}\, I_{1/4}\left(\frac{x^2}{2\delta^2}\right) + C_2\sqrt{\frac{x}{\delta}}\, I_{-1/4}\left(\frac{x^2}{2\delta^2}\right), \tag{9}$$

где $I_{\pm 1/4}(\ )$ – функция Бесселя мнимого аргумента. Так как искомое решение $\phi^{(0)}$ должно быть нечетным, $C_2 \equiv 0$, а C_1 находим из условия финитности решения при $|x| \to \infty$. Если $\mathrm{Re}\,\delta^2 > 0$, $C_1 = 0$, если $\mathrm{Re}\,\delta^2 < 0$ $C_1 = \sqrt{2\pi}\,\Gamma(3/4)\delta^{-1}$, где $\Gamma(3/4)$ – гамма-функция. Таким образом, если $\delta = |\delta|\, e^{i\alpha}$, то решение скачком меняет свой вид на линиях $\alpha = \pm\pi/4$ (линиях Стокса).

Рассмотрим сначала задачу решавшуюся в [6, 7], т. е. опустив ионные вклады в (1) – (2), сохраним в (3) только первое слагаемое. Легко получить, аналитически продолжая решение с действительной оси, соответственно на прямую $t\exp(i\alpha)$, $(\mathrm{Re}\,\delta^2 > 0)$ или на прямую $t\exp i(\alpha - \pi/2)$, $(\mathrm{Re}\,\delta^2 < 0)$, где $t \in (-\infty, +\infty)$ – действительное число, что величина интеграла $I = 2\int_0^\infty dx(1 + y_0 x)$ имеет вид

$$I = \begin{cases} (-1)^n I_1\delta, & \left(\frac{-\pi}{4} + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{4} + \pi n\right) \quad \begin{matrix} n = 0, \text{ I сектор} \\ n = 1, \text{ III сектор} \end{matrix} \\ -i(-1)^k I_1\delta & \left(\frac{\pi}{4} + \pi k < \alpha < \frac{3\pi}{4} + \pi k\right) \quad \begin{matrix} k = 0, \text{ II сектор} \\ k = 1, \text{ IV сектор} \end{matrix} \end{cases} \tag{10}$$

где $I_1 = 2\pi\Gamma(3/4)/\Gamma(1/4)$.

Предположив, что решение δ лежит в первом секторе, получаем дисперсионное уравнение, в точности совпадающее с уравнениями [6, 7]

$$\frac{c^2}{\omega_{pe}^2}\Delta' = \frac{\omega_*}{\nu_{ei}}(-i\overline{\delta\omega_e})\, I_1\delta, \quad \delta^4 = \frac{\delta_e^2\rho_i^2\eta_i}{i\overline{\delta\omega_e}}. \tag{11}$$

Решая уравнение (11), получаем противоречие с исходными предположениями, не замеченное в [6, 7]: $\delta \sim \sqrt[3]{-1}$, т. е. все три корня лежат вне сектора I. Аналогично предполагая, что решение лежит соответственно во II, III, IV секторах и выбирая нужную фазу согласно (10) приходим каждый раз к противоречию с исходными допущениями. Таким образом, *решения лежащие вне линий Стокса* $\alpha = \pm\pi/4$ *отсутствуют.*

Предположим теперь, что решение δ имеет фазу в точности равную $\pi/4$, тогда решение на линии Стокса необходимо строить как полусумму решений сверху и снизу от нее, т. е. $C_1 = \sqrt{\pi/2}\,\Gamma(3/4)\delta^{-1}$ (только такой выбор константы обеспечивает, как мы увидим ниже наличие собственных мод). Вид решения при этом совпадает с решением выбранным из условия конвективного оттока энергии в работе [1]. Теперь

вместо (11) мы имеем:

$$\frac{c^2}{\omega_{pe}^2}\Delta' = \frac{\omega_*}{\nu_{ei}}(-i\overline{\delta\omega_e})\, I_1\frac{\delta - i\delta}{2}\,. \qquad (12)$$

Как легко видеть уравнение (12) действительно имеет корень $\delta \sim \sqrt[3]{i-1}$ с фазой $\pi/4$ соответствующий нарастающему решению $\mathrm{Re}\,\overline{\delta\omega_e} = 0$, $\mathrm{Im}\,\overline{\delta\omega_e} > 0$. Величина инкремента фактически совпадает с найденной в [6, 7], хотя решение как мы видим носит совершенно другой характер.

Решим теперь последний вопрос – устойчиво ли такое необычное решение, относительно поправок $\Delta_i^{(1,2)}$. Если учет Δ_i меняет фазу и решение уходит с линии Стокса, то собственные моды колебаний как мы убедились выше отсутствуют и неустойчивости нет. Возмущенное решение y_1 на линии Стокса строится аналогично (12), как полусумма решений сверху и снизу от нее. Это позволяет определить фазу $\Delta_i^{(2)}$. Что касается $\Delta_i^{(1)}$, то вычисляя интеграл (5) можно показать, что для решения (9) он оказывается тождественно равным нулю

$$\Delta_i^{(1)} = 0, \quad \Delta_i^{(2)} = \frac{\omega_{pi}^2}{c^2}\,\frac{\omega_*}{\nu_{ei}}\,\frac{i\eta_i}{2}\,\frac{\delta^3}{\delta_i^2}\, I_2\frac{1+i}{2}\,, \qquad (13)$$

где $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,\bar{y}_1(t)\,dt \sim -3$ интеграл взятый по действительной оси от функции $\bar{y}_1(t)$ удовлетворяющей уравнению

$$\bar{y}_1'' - t^2\bar{y}_1 = t^3\left(1 - t^2/2\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\sqrt{\sin\theta}\,\exp\left(-\frac{t^2\cos\theta}{2}\right)\right)\,. \qquad (14)$$

Как легко видеть фаза выражения (13) на линии Стокса $\delta \sim e^{i\pi/4}$ равна $\pi/2$, т. е. учет ионной поправки приводит к уходу решения с линии Стокса (такой же результат дает учет поправок за счет конечности δ/δ_e). Таким образом, решение хотя формально и существует, но исчезает при учете малых поправок. Таким образом, собственные моды столкновительной тиринг-неустойчивости отсутствуют для дрейфовых частот, сравнимых с известным инкрементом Фюрса, Киллена и Розенблюта [8]: $\omega_* > \nu_{ei}^{3/5}\,(k_{\parallel}' v_{Te}/\rho_i)^{2/5}\,(c^2\Delta'/\omega_{pe}^2)^{4/5}$ [1].

Критерий стабилизации, предложенный для рассматриваемой здесь моды в работе [2] может быть получен из наших уравнений (3) – (6), если не заботясь о фазовых соотношениях считать, что ионная добавка $\Delta_i^{(2)}$ достигает конечной величины порядка Δ'. Однако, как мы

---

[1] Впрочем, при очень сильных столкновениях этот критерий заменяется более слабым ограничением $\omega_* > \nu_{ei}\, m/M$, так как при $\nu_{ei} > \omega_*\, m/M$ дрейфовые эффекты уже не играют роли.

показали выше природа решения оказывается такова, что уже малое взаимодействие с ионами приводит к исчезновению собственных решений дрейфовой столкновительной моды колебаний.

Институт космических исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 октября 1979 г.

Литература

[1] B.Coppi, W.K.Mark, L.Sugiyama, G.Bertin. Phys. Rev. Lett., **42**, 1058, 1979.

[2] M.N. Bussac, D.Edery, R.Pellat, J.H.Soule. Phys. Rev. Lett., **40**, 1500, 1978.

[3] D.W.Ross, S.Mahajan. Phys. Rev. Lett., **40**, 324, 1978.

[4] K.T.Tsang, P.J.Catto, J.S.Whitson, J.Smith. Phys. Rev. Lett., **40**, 327, 1978.

[5] P.N.Gusdar, L.Chen, P.K. Kaw, C.Oberman Phys. Rev. Lett., **40**, 1566, 1978.

[6] R.D.Hazeltine, D.Dobrott, T.S.Wang. Phys. Fluids, **18**, 1778, 1975.

[7] J.F.Drake, Y.C.Lee. Phys. Fluids, **20**, 1341, 1977.

[8] H.P.Furth, J.Killeen, M.N.Rosenbluth. Phys. Fluids, **6**, 459, 1963.

[9] А.А.Галеев, Л.Зеленый. Письма в ЖЭТФ, **25**, 467, 1977.