Письма в ЖЭТФ, том 31, вып. 1, стр. 70 – 75 *5 января 1980г.*

КВАНТОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ФЕРМИ-БОЗЕ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ КОМПЕНСИРУЮЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА

Т.Е. Фрадкина

Методом компенсирующего функционала получено универсальное выражение для S-матрицы произвольной ферми-бозе системы со связями общего вида.

За последние годы особый интерес приобрели попытки построения супергравитационных моделей, объединяющих сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное взаимодействия.

Эти модели представляют собой калибровочные системы с ферми-бозе связями. Фрадкиным в работе [1] было проведено квантование произвольной ферми-бозе системы со связями первого и второго рода и получено корректное выражение для S-матрицы такой системы в канонических калибровочных условиях. Проблема квантования систем со связями в релятивистских калибровках была решена в последние годы в работах [2 – 5].

В то время, как для систем в канонических калибровочных условиях полученное в [1] выражение для S-матрицы имеет для всех теорий универсальный вид, для систем в релятивистских калибровках, как показано в работе [5], выражение для S-матрицы не универсально и выписывается для теорий каждого ранга в отдельности. Эта специфика обусловлена незамкнутостью лагранжевой калибровочной алгебры теорий с рангом, бо́льшим единицы.

Хотя полученное в [5] выражение для S-матрицы с данным конкретным рангом является наиболее адекватным и удобным для построения диаграмной техники в теории, представляет большой интерес получение универсального ответа для произвольной теории общего вида в релятивистских калибровках.

Недавно Баталиным и Фрадкиным было получено в статье [6] универсальное выражение для S-матрицы произвольной бозе-системы со связями первого рода в релятивистских калибровках. Целью настоящей статьи является получение универсального выражения для S-матрицы в общем случае ферми-бозе систем со связями первого и второго рода.

Динамическая система со связями описывается Гамильтоновым действием:

$$S = \int (p_i \dot{q}^i - H(p, q) - T_\mu (p, q) \lambda^\mu) \, dt , \tag{1}$$

где q^i, p_i – координаты фазового пространства, H – Гамильтониан системы, λ^μ – лагранжевы множители, T_μ – связи первого рода в инволюции:

$$\{ T_\alpha , T_\beta \}_D = T_\gamma U^{\gamma}_{\alpha\beta} , \tag{2}$$

$$\{ H_0 , T_\alpha \}_D = T_\beta V^{\beta}_{\alpha} . \tag{3}$$

Определим Дираковские скобки [1]:

$$\{ A, B \}_D = \{ A, B \} - \{ A, \chi_k \} \{ \chi_k , \chi_s \}^{-1} \{ \chi_s , B \} , \tag{4}$$

где χ_k – связи второго рода и $\{\ldots\}$ – Пуассоновские скобки для общего случая ферми-бозе частиц [1]:

$$\{ A, B \} = \frac{\partial^r A}{\partial q^a} \frac{\partial^e B}{\partial p_a} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\partial^r B}{\partial q^a} \frac{\partial^e A}{\partial p_a} . \tag{5}$$

Или, введя обобщенную переменную g^a:

$$g^a = \left(\frac{q^i}{p_i} \right).$$

Преобразуем (5) к виду:

$$\{ A, B \} = \frac{\partial^r A}{\partial g^a} \epsilon^{ab}_{(B)} \frac{\partial^r B}{\partial g^b} \tag{6}$$

$$\epsilon^{ab}_{(B)} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{ab}(-1)^{n_a(n_B+1)} \\ -\delta^{ab}(-1)^{n_a n_B} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Действие (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\delta g^a = R^a_a(g)\theta^a, \qquad (8)$$

$$\delta\lambda^\mu = \hat{R}^\mu_a(g, \lambda)\theta^a, \qquad (9)$$

где

$$R^a_a(g) = \{ g^a, T_a \}_D, \qquad (10)$$

$$\hat{R}^\mu_a(g, \lambda) = \delta^\mu_a \frac{d}{dt} + U^\mu_{a\beta}\lambda^\beta - V^\mu_a, \qquad (11)$$

Введем калибровочные условия функционалом:

$$\Psi^a(t/g, x\lambda) \qquad (12)$$

Основой метода [6] является получение калибровочно-инвариантного и унитарного выражения для производящего функционала в обобщенной калибровке (12), зависящей от параметра "x", причем зависимость эта подбирается таким образом, чтобы при нулевом "x" калибровка переходила в каноническую, а при "x" = 1 калибровка принимала бы искомый релятивистский вид. Запишем производящий функционал для такой системы со связями в обобщенных калибровочных условиях (12) в виде

$$Z = \int [d\mu] \exp\{iS\} \delta(\Psi(g/x\lambda)\, \Delta(x/g, \lambda) \qquad (13)$$

$$[d\mu] = [dg][d\lambda] M, \qquad (14)$$

$$M = \delta(\chi_k) \exp\left[\frac{1}{2}\, Tr_\pm \ln Q_{ab}\right], \qquad (15)$$

$$Tr_\pm \bar{Q}_{ab} = \sum_a \epsilon_a \bar{Q}_{aa}; \quad Q_{ab} = \{ \chi_a, \chi_b \}; \quad \epsilon_a = \begin{cases} 1, & a - \text{бозе} \\ -1, & a - \text{ферми} \end{cases}$$

А $\Delta(x/g, \lambda)$ – так называемый компенсирующий функционал, подбираемый из условия независимости s-матрицы от калибровки (от параметра "x").

Заметим, что производящий функционал (13) устроен так, что при $x = 0$ он переходит в известное выражение для производящего функционала ферми-бозе систем со связями первого и второго рода в канонических калибровках, полученное в работе [1], и тем самым обеспечивается его унитарность при всех "x". Используя тот факт, что действие s калибровочно-инвариантно (т. е. калибровочные преобразования (8), (9) не изменяют вида s), совершим такое калибровочное преобразование (8), (9), которое переведет калибровку $\Psi^a(g/x\lambda)$ в калибровку $\Psi^a(g/(x+dx)\,\lambda) = \Psi^a(g/x\lambda) + \delta\,\Psi^a$. Легко убедиться, что такое приращение $\delta\,\Psi^a = \dfrac{d^r\Psi^a}{dx}\,dx$ к исходной калибровке индуцируется калибровочным преобразованием (8), (9) с параметром θ^a, равным:

$$\theta^a = F^a(\,t;\ x/g,\,\lambda)\,dx, \tag{16}$$

где

$$F^a(t;\,x/g,\,\lambda) = \int D^a_\beta(t,\,t';\,x/g,\,\lambda)\,\frac{d^r\Psi^\beta(t'/g,\,x\lambda)}{dx}\,. \tag{17}$$

При этом функция D находится из условия:

$$\int dt'\,D^a_\beta(t',\,t'';\,x/g,\,\lambda)\,D^{-1\beta}_{\gamma}(t',\,t;\,x/g,\,\lambda) = \delta^a_\gamma\,\delta(t''-t), \tag{18}$$

где

$$D^{-1a}_{\beta}(t',\,t;\,x/g,\,\lambda) = \{\Psi^a(t'),\,T_\beta(t)\} +$$

$$+\ \frac{\delta^r\Psi^a(t/g,\,x\lambda)}{\delta\lambda^\mu(t')}\,\hat{R}^\mu_\beta(g/t'),\,\lambda(t')\,). \tag{19}$$

Как уже было сказано, компенсирующий функционал $\Delta(x/g,\,\lambda)$ выбираем из условия независимости производящего функционала от параметра "x", учитывая изменение Δ и меры M, получим следующее уравнение для Δ: [1)]

$$\frac{\partial^r\Delta}{\partial x} = [\hat{\Omega} + J(x/g,\,\lambda)\,]\,\Delta, \tag{20}$$

где

$$\hat{\Omega}\Delta = \int dt\left[\{\Delta,\,T_a(t)\}_D + \frac{\delta^n\Delta}{\delta\lambda^\mu}\,\hat{R}^\mu_a\,(g(t),\,\lambda(t))\right]F^a(t;\,x/g,\,\lambda)\,, \tag{21}$$

$$J(x/g,\,\lambda) = \int dt\left[-\{g^a(t),\,\delta^F g^a(t)\}_D + (-1)^{n\mu}\,\frac{\delta^r(\delta^F\lambda^\mu(t))}{\delta\lambda^\mu(t)}\right]. \tag{22}$$

Унитарность S-матрицы обеспечивается начальными условиями на Δ:

$$\Delta(x=0) = \Delta_0(g) = \mathrm{Det}_\pm\,D_0^{-1}\,(t,\,t'/g)\,,$$

---

1) Компенсирующий функционал, удовлетворяющий соотношению, аналогичному (20), был предложен в работе [7] Баталиным в применении к построению калибровочно-инвариантной S-матрицы в случае массивного поля Янга — Миллса.

где знак "±" надо понимать в смысле формулы (15). В этом случае, при канонических калибровочных условиях, выражение для Z совпадает с выражением для S-матрицы, найденным Фрадкиным [1]. Следуя [6], представим Δ в виде

$$\Delta = \Delta_1 \mathrm{Det}_{\pm}\, D^{-1}. \tag{23}$$

И уравнение (20) принимает вид

$$\frac{\partial^r \Delta_1}{\partial x} = [\hat{\Omega} + J_1(x/g, \lambda)]\Delta_1, \tag{24}$$

где

$$J_1(x/g, \lambda) =$$

$$= \int dt\, dt' D^{\beta}_{\gamma}(t;\, t';\, x/g, \lambda)[\{\Psi^{\gamma}(t'/g, x\lambda), U^{\nu}_{\beta a}(g(t))\}_D T_{\nu}(g(t))(-1)^{n_\nu n_{\nu a \beta}} +$$

$$+ \frac{\delta^r \Psi^{\gamma}(t'/g, x\lambda)}{\delta \lambda^{\mu}(t)} (-\dot{U}^{\mu}_{\beta a}(g(t)) + \{U^{\mu}_{\beta a}(g(t)),\ H(g(t) +$$

$$+ T_{\nu}(g(t))\ \lambda^{\nu}(t)\}_D + B^{\mu}_{a\beta\nu}(g(t)\lambda^{\nu}(t)(-1)^{n_a n_\nu \beta} +$$

$$+ B^{\mu}_{a\beta}(g(t))(-1)^{n_a n_\beta})]\, F^{a}(t;\, x/g, \lambda)(-1)^{n_\beta}; \tag{25}$$

$$B^{\mu}_{a\beta\nu}(g) = (-1)^{n_a n_\nu}\{U^{\mu}_{a\beta}, T_\nu\}_D + (-1)^{n_\nu n_\beta}\{U^{\mu}_{\nu a}, T_\beta\}_D +$$

$$+ (-1)^{n_a n_\beta}\{U^{\mu}_{\beta\nu}, T_a\}_D - U^{\mu}_{\nu\delta} U^{\delta}_{a\beta}(-1)^{n_\beta n_\nu} - U^{\mu}_{\beta\delta}\ U^{\delta}_{\nu a}(-1)^{n_a n_\beta} -$$

$$- U^{\mu}_{a\delta}\ U^{\delta}_{\beta\nu}(-1)^{n_a n_\nu}; \tag{26}$$

$$B^{\mu}_{a\beta}(g) = \{V^{\mu}_{a}, T_{\beta}\}_D - \{V^{\mu}_{\beta}, T_a\}_D(-1)^{n_a n_\beta} + \{U^{\mu}_{a\beta}, H\}_D +$$

$$+ U^{\mu}_{a\delta}\ V^{\delta}_{\beta} - V^{\mu}_{\delta}\ U^{\delta}_{a\beta} - (-1)^{n_a n_\beta} U^{\mu}_{\beta\delta}\ V^{\delta}_{a}. \tag{27}$$

Из обобщенных тождеств Якоби мы получим условие на функции (26) и (27):

$$\begin{cases} T_\mu B^{\mu}_{a\beta\gamma} = 0 & (28) \\ T_\mu B^{\mu}_{a\beta} = 0 & (29) \end{cases}$$

При этом начальные условия на Δ_1 имеют вид: $\Delta_1(x = 0) = 1$. Уравнения характеристик для (24) запишем в виде

$$- \frac{d}{dx'} \begin{pmatrix} \bar{g}^a \\ \bar{\lambda}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^a_{\ a}(\bar{g}) \\ \hat{R}^\mu_a (\bar{g}, \bar{\lambda}) \end{pmatrix} F^a(t;\, x'/g,\, \lambda). \qquad (30)$$

С начальными условиями:

$$\bar{g}^a(x' = x) = g^a(t),$$
$$\bar{\lambda}^\mu(x' = x) = \lambda^\mu(t). \qquad (31)$$

Решение уравнения (24) с начальными условиями (29) имеет вид

$$\Delta_1(x/g, \lambda) = \exp\{ \int_0^x J_1(x'/\bar{g}(x'), \bar{\lambda}(x'))\, dx' \}. \qquad (32)$$

Учтем тот факт, что релятивистским калибровкам соответствует $x = 1$ и получим выражение Баталина – Фрадкина для производящего функционала в общем случае теории с ферми-бозе связями первого и второго рода:

$$Z = \int [d\mu] \exp\{ iS(g, \lambda)\} \delta(\Psi(g, \lambda))\, \Delta_1(1/g, \lambda)\, \mathrm{Det}_\pm D^{-1}, \qquad (33)$$

где J_1 находится из соотношений (25), (26), (27), Δ_1 из (32), а $\bar{g}$ и $\bar{\lambda}$ определяются из решения уравнений характеристик (30) с начальными условиями (31).

В заключение выражаю свою глубокую благодарность М.А.Маркову и А.А.Комару за интерес к работе и Е.С.Фрадкину за ряд ценных указаний.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 октября 1979 г.

Литература

[1] E.S.Fradkin. Acts Universizates Wratislavients, №207, Proceedings of X the Winter School of Theoretical Physics in Karpacz, 1973.

[2] E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky. Phys. Lett., 55B, 224, 1975; Preprint Nr. 2332 CERN, 1977.

[3] E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky. Nuovo Cim., Lett., 13, 187, 1975.

[4] I.A.Batalin, G.A.Vilkovisky. Phys. Lett., 69B, 309, 1977.

[5] E.S.Fradkin, T.E.Fradkina. Phys. Lett., 72B, 343, 1978.

[6] I.A.Batalin, E.S.Fradkin. Phys. Lett., 86B, 263, 1979.

[7] I.A.Batalin. Nuclear Physics, B76, 347, 1974.