Письма в ЖЭТФ, том 31, вып. 2, стр. 138 – 142 *20 января 1980 г.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИНСТАНТОНОВ И АНТИИНСТАНТОНОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ 0(3) σ-МОДЕЛИ И НЕКОТОРАЯ ТОЧНО РЕШАЕМАЯ ФЕРМИОННАЯ ТЕОРИЯ

А.П.Бухвостов, Л.Н.Липатов

На основе вычисления энергии взаимодействия инстантонов и антиинстантонов в $0(3)$ σ-модели предложена двухкомпонентная двумерная фермионная модель, которая решается точно.

1. Среди всех двумерных эвклидовых моделей квантовой теории поля наибольший интерес вызывает нелинейная σ-модель с действием

$$S = \frac{1}{2f} \int d^2x \, (\partial_\mu n(x))^2, \qquad n^2(x) = 1, \tag{1}$$

где $n(x)$ есть единичный трехмерный вектор. Этот интерес связан с близкой аналогией между σ-моделью и теорией Янга – Миллса и, в частности, с наличием в ней инстантонов [1]. Если параметризовать $n(x)$ с помощью комплексной функции $w(x_1, x_2)$:

$$n_1 = \mathrm{Re}\, w, \quad n_2 = \mathrm{Im}\, w, \quad n_3 = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}, \tag{2}$$

то инстантон – решение уравнения $\delta S = 0$ с топологическим зарядом $n > 0$ – имеет вид [1, 2]:

$$w = h \prod_{i=1}^{n} \frac{z - a_i}{y - b_i}, \qquad z = x_1 + ix_2, \tag{3}$$

где h, a_i, b_i – произвольные комплексные параметры. Решение, отвечающее антиинстантону с топологическим зарядом $(-n)$, получается из (3) заменой $z \to z^*$.

В работе [2] был вычислен вклад в статсумму $Z = \int Dn \exp(-S)$ от всех конфигураций (3) с учетом квантовых флуктуаций вокруг классических решений. Полученное выражение отвечает статсумме кулоновского газа при определенной температуре, причем параметры a_i и b_i представляют собой координаты положительно и отрицательно заряженных частиц. Статсумма Z при данной температуре может также быть записана в терминах невзаимодействующих массивных фермионов. В данной работе мы на основе вычисления вклада в статсумму от конфигураций, отвечающих слабо взаимодействующим инстантонам и антиинстантонам, приходим к некоторой модели, которая решается точно.

2. Мы выбираем для функции $w(x_1, x_2)$, описывающей взаимодействующие инстантоны и антиинстантоны, следующее выражение (по аналогии с (3)):

$$w = h \prod_{i=1}^{n_1} \frac{z - a_i}{z - b_i} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{z^* - c_j^*}{z^* - d_j^*}. \tag{4}$$

Формула (4) дает приближенное решение классических уравнений $\delta S = 0$ при условии, что взаимодействие инстантонов с антиинстантонами мало. Это имеет место для таких конфигураций, когда инстантоны и антиинстантоны различаются масштабами (например, $(|a_{i_1} - b_{i_2}| \ll |c_{j_1} - d_{j_2}|)$ или расположены далеко друг от друга $(|a_{i_1} - b_{i_2}| \sim |c_{j_1} - d_{j_2}| \ll |a_{i_1} - c_{j_1}|)$. Энергия взаимодействия S_{int} определяется как разность величины действия (1), сосчитанного на конфигурации (4), и суммы величин, отвечающих невзаимодействующим инстантонам и антиинстантонам; в пределе $S_{int} \ll S$ она оказывается равной

$$S_{int} = S - \frac{4\pi}{f}(n_1 + n_2) = \sum_{ij} \frac{16\pi |w_{ij}|^2}{f(1 + |w_{ij}|^2)^2} \mathrm{Re} \frac{(a_i - b_i)(c_j - d_j)}{(a_i - c_j)(b_i - d_j)}. \tag{5}$$

Здесь w_{ij} есть значение функции (4) в области раздела между группой инстантонов, к которой принадлежит инстантон с параметрами a_i, b_i, и группой антиинстантонов, к которой принадлежит антиинстантон с параметрами c_j, d_j. (В пределе малости взаимодействия такую область медленного изменения функции $w(z)$ можно указать для любых i, j, вклад которых в сумму (5) не пренебрежимо мал). Отметим, что выражение (5) конформно-инвариантно и обладает еще некоторым свойством симметрии, которое является следствием инвариантности действия (1) по отношению к глобальным поворотам вектора n.

Вычисление квантовых флуктуаций около приближенного решения (4) в пределе слабо взаимодействующих инстантонов и антиинстантонов производится точно так же, как в работе [2], и приводит к выражению для статсуммы кулоновского газа из двух сортов частиц. Взаимодействие частиц разных сортов описывается множителем $\exp(-S_{int})$ (см. (5)).

3. Попробуем построит фермионную модель, которая правильно описывала бы взаимодействие инстантонов и антиинстантонов, по крайней мере на больших расстояниях. Можно проверить, что если написать для статсуммы выражение, отвечающее двум взаимодействующим фермионам ψ_1 и ψ_2 с лагранжианом

$$L = \sum_{r=1,2} \bar{\psi}_r(i\hat{\partial} - m)\psi_r - g(\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1)(\bar{\psi}_2\gamma_\mu\psi_2), \tag{6}$$

то в низшем порядке теории возмущений по константе g поправка к статсумме совпадает с поправкой на взаимодействие упомянутого выше кулоновского газа, с той разницей, что множитель перед знаком Re в формуле (5) заменяется на $-2g/\pi$. Таким образом, рассматривая далее фермионную теорию с лагранжианом (6), мы можем надеяться правильно описать только взаимодействие инстантонов и антиинстантонов на больших расстояниях, где указанный множитель не зависит от параметров a, b, c, d.

4. Теория поля с лагранжианом (6) допускает точное решение. Его можно получить с помощью методов, разработанных для массивной модели Тирринга [3]. Если перейти от лагранжева к гамильтонову описанию и искать решение уравнения Шредингера $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$ в виде состояния с определенным числом фермионов с положительной или отрицательной энергией, то можно показать, что волновая функция, описывающая n фермионов с импульсами k_i и знаками энергии σ_i, может быть найдена в виде анзаца Бете (ср. [4]):

$$\chi_{a_1\dots a_n}(x_i, a_i)\Big|_{x_1<\dots<x_n} = \sum_{\{i_1,\dots i_n\}} (-1)^{P\{i_1,\dots i_n\}} \times$$

$$\times A^{i_1\dots i_n}_{a_1\dots a_n} \prod_{r=1}^{n} f_{k_{i_r}\sigma_{i_r}}(x_r, a_r); \tag{7}$$

$$f_{k\sigma}(x, a) = e^{ikx} u_\sigma(a); \quad u_\sigma(a) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{y}{2}} \\ \sigma e^{\frac{y}{2}} \end{pmatrix},$$

где $a_i = 1, 2$ соответствуют двум возможным сортам фермионов ("изоспин"); $\{i_1, \ldots i_n\}$ означает некоторую перестановку чисел $1, 2, \ldots n$; $P\{\,\}$ есть четность этой перестановки; y — быстрота частицы: $k = \sigma m \operatorname{sh} y$. Коэффициенты $A^{i_1 \ldots i_n}_{a_1 \ldots a_n}$ могут быть выражены через коэффициент $A^{1 \ldots n}_{a_1 \ldots a_n}$ с помощью формулы:

$$A^{i_1 \ldots i_n}_{a_1 \ldots a_n} = S^{a'_{r+1} a'_r}_{a_r a_{r+1}}(y_r - y_{r+1}) A^{i_1 \ldots i_{r+1} i_r \ldots i_n}_{a_1 \ldots a'_{r+1} a'_r \ldots a_n}, \tag{8}$$

где S есть двухчастичная S-матрица для рассеяния фермионов в этой теории:

$$S^{a'b'}_{ab}(y) = \delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{ab} + \frac{1}{2}\epsilon_{cab}\epsilon_{ca'b'}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{y - ig}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y + ig}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\tau_x)_{ab}(\tau_x)_{a'b'}\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{y - ig}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{y + ig}{2}\right)}. \tag{9}$$

Матрица (9) удовлетворяет условию факторизации [3], что обеспечивает совместность уравнений (8) и приводит к возможности найти точное решение модели с лагранжианом (6).

5. Для построения физического вакуума необходимо найти решение уравнения Шредингера с минимальной энергией. Такая постановка задачи является корректной только в конечном объеме пространства L и при наличии обрезания Λ на допустимые значения быстрот ($|y| < \Lambda$). Можно потребовать, в частности, чтобы функция $\chi_{a_1 \ldots a_n}(x_i, a_i)$ удовлетворяла периодическим граничным условиям по каждой из координат x_i. Чтобы найти все значения y_i и матрицы $A^{1 \ldots n}_{a_1 \ldots a_n}$ в формулах (7), при которых удовлетворяются периодические условия, мы пользуемся квантовым вариантом метода обратной задачи [6]. Приведем только окончательные уравнения для нахождения спектра значений y_i $(i = 1, \ldots n)$ и некоторых параметров v_r $(r = 1, \ldots l)$, число которых равно числу фермионов сорта 2 (число фермионов сорта 1 равно $n - l$):

$$e^{imL \operatorname{sh} y_j} = \prod_{r=1}^{e} \frac{\operatorname{sh}\left(v_r - y_j + \frac{ig}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(v_r - y_j - \frac{ig}{2}\right)};$$

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}\left(v_s - y_j + \frac{ig}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(v_s - y_j - \frac{ig}{2}\right)} = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{l} \frac{\operatorname{sh}(v_s - v_r + ig)}{\operatorname{sh}(v_s - v_r - ig)} . \tag{10}$$

Уравнения (7) – (10) позволяют найти все решения стационарного уравнения Шредингера, отвечающего теории с лагранжианом (6). Энергия и импульс для этих состояний равны сумме тех же величин для отдельных фермионов.

В непрерывном пределе удобно ввести плотности распределения фермионов по быстротам y и параметрам v: $\rho(y_i) = [L(y_i - y_{i-1})]^{-1}$, $\mu(v_r) = [L(v_r - v_{r-1})]^{-1}$. При решении уравнений (10) для состояния с минимальной энергией (физический вакуум) оказывается, что $\rho(y)$ совпадает с аналогичной величиной для невзаимодействующей модели ($g = 0$). Из этого, в частности, следует, что приближение разреженного газа, обычно используемое в теории Янга – Миллса для нахождения вклада инстантонов в энергию основного состояния, может давать правильный ответ при условии, что взаимодействие между инстантонами учитывается точно, а указанное приближение используется только для учета взаимодействия инстантонов с антиинстантонами. В следующей работе мы надеемся обсудить спектр масс, возникающий в модели (6).

Авторы благодарны А.А.Белавину, Е.Б.Богомольному и А.С.Шварцу за полезные обсуждения.

Институт ядерной физики
им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 ноября 1979 г.

Литература

[1] А.А.Белавин, А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 22, 503, 1975.

[2] В.А.Фатеев, И.В.Фролов, А.С.Шварц. Nucl. Phys., B154, 121, 1979.

[3] H.Bergknoff, H.B.Thacker. Preprint Fermilab-Pub 78/61-THY, 1978; В.Е.Корепин. ТМФ, 40, 316, 1979.

[4] Ф.А.Березин, В.Н.Сушко. ЖЭТФ, 48, 1293, 1965.

[5] C.N.Yang. Phys. Lett., 19, 1312, 1967; А.Б.Замолодчиков. Письма в ЖЭТФ, 25, 499, 1977.

[6] R.Y.Baxter. Ann. Phys., 70, 193, 1972; Е.К.Склянин, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 40, 194, 1979; A.A.Belavin. Phys. Lett., B76, 327, 1979.