Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 5, стр. 252 – 255 5 марта 1978 г.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ФОНОННОГО ГАЗА В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Р.Н.Гуржи, А.О.Максимов

Показано, что при определенных свойствах закона дисперсии поперечных колебаний, приводящих к резкому увеличению времени релаксации продольных длинноволновых фононов (ПДФ), существенным образом изменяется характер гидродинамических явлений в диэлектриках. Полученные результаты позволяют объяснить температурную зависимость коэффициентов теплопроводности и затухания второго звука, наблюдаемую экспериментально.

В чистых диэлектриках при низких температурах длина свободного пробега тепловых фононов l_N определяется нормальными процессами распада и слияния, обусловленными тройными ангармонизмами. Под действием одних только нормальных столкновений в фононной системе устанавливается распределение

$$\left(\exp\frac{\omega - \mathbf{up}}{T + \delta T} - 1\right)^{-1} \approx N(\omega) - \left(\mathbf{up} - \frac{\omega}{T}\,\delta T\right)\frac{\partial N}{\partial\omega}\ , \qquad (1)$$

характеризуемое двумя гидродинамическими параметрами: скоростью упорядоченного движения $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и неравновесной добавкой к температуре $\delta T(\mathbf{r}, t)$. Здесь ω – энергия фонона, $\mathbf{p}$ – его квазиимпульс, $N(\omega)$ – бозевская функция распределения.

Цель настоящей работы состоит в следующем. Обычно предполагается, что гидродинамические явления в диэлектриках определяются исключительно тепловыми фононами (см., например, [1, 2]). В работе показано, что при выполнении определенных условий, которые реализуются в кристаллах как высокой, так и низкой симметрии, ситуация существенно изменяется: носителями энергии и импульса, как обычно, являются тепловые фононы, тогда как вязкость определяется ПДФ.

Известно, что ПДФ могут участвовать в столкновениях двух типов: (a) для процессов $l + t \rightleftarrows l$ и $t + t \rightleftarrows l$ (l – продольная мода, t – поперечные) асимптотически при $\omega << T$ время свободного пробега $\tau(\omega) \sim T^{-1}\omega^{-4}$; ($b$) для процесса $l + t \rightleftarrows t$, возможного при наличии вырождения поперечных колебаний (Херринг [3]), $\tau(\omega) \sim T^{m-5}\omega^{-m}$, причем, в зависимости от симметрии кристаллической решетки, $m = 2,3$ или 4. Отсюда уже видно, что в ряде кристаллов низкой симметрии, для которых $m = 3,4$ вязкость определяется ПДФ: согласно (1), плотность импульса этих фононов $\sim \omega^2$, тогда как расстояние, на которое передается импульс $\sim \omega^{-m}$. Это означает, что взаимодействие между движущимися с различными скоростями u слоями фононного газа будет осуществляться путем обмена ПДФ, длина свободного пробега которых сравнима с характерными размерами системы. Ясно, что в таких условиях уравнения гидродинамики будут иметь нелокальный характер. Однако, большинство из исследуемых экспериментально кристаллов имеют высокую симметрию, для них $m = 2$ и вклад ПДФ, казалось бы, несущественен.

Отметим в связи с этим, что в высокосимметричных кристаллах максимальное расстояние Δp между поверхностями постоянной энергии поперечных колебаний обычно мало. В таких условиях процесс Херринга имеет порог при частоте $\omega_0 \approx \Delta p / pT$, так как продольный фонон с импульсом большим Δp, "не помещается" между температурными поперечными ветвями колебаний. Таким образом, при $\omega_0 < \omega < T$ возможны только процессы (a). При этом, если длина свободного пробега $l(\omega_0) \approx l_N (p / \Delta p)^4$ больше характерных размеров системы, реализуется случай $m = 4$. (Предполагается, что длина свободного пробега ПДФ, связанная с механизмом Саймонса (см. [4]), больше характерных размеров системы). В общем случае уравнения гидродинамики фононного газа, нелокальные в пространстве и времени, имеют громоздкий вид. Рассмотрим поэтому в качестве примера стационарный перенос тепла в пластине толщиной $2d >> l_N$. Направим ось z по нормали к поверхности пластины, а ось x вдоль градиента температуры и скорости дрейфа. В условиях диффузного рассеяния фононов на границах пластины[1)] скорость $u(z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\int_{-d}^{+d} Q(|z - z'|) [u(z) - u(z')] dz' + u(z) [K(d + z) + K(d - z)] = \gamma \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{2}$$

$$K(z) = \int_{-1}^{1} d\mu \, (1 - \mu^2) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\tau(\omega)} \frac{\partial N}{\partial \omega} \left(\frac{\omega}{T} \right)^4 \exp\left(- \frac{z}{l(\omega) |\mu|} \right),$$

[1)] Даже при отражении от идеальной поверхности ПДФ с вероятностью порядка единицы трансформируются в поперечные фононы, которые уже легко передают импульс тепловым фононам [5].

$$Q = -dK/dz, \quad \gamma \approx s^2 T^{-1}, \quad l(\omega) = s\tau(\omega), \quad \omega = sp, \quad \mu = s_z/s.$$

Интегральный член в уравнении (2) описывает силу вязкого трения, а члены $u(z)K(d \pm z)$ отвечают взаимодействию с границами. Выражения для этих сил легко получить из наглядных соображений. Вероятность излучения неравновесного ПДФ с импульсом p в элементе dz пропорциональна $dz\,|\,l(\omega)\mu\,|^{-1} u(z) p_x \partial N/\partial\omega$, а вероятность поглощения этого фонона в элементе dz' пропорциональна $dz'\,|\,l(\omega)\mu\,|^{-1}\exp(-|\,z-z'\,| \times |\,l(\omega)\mu|^{-1})$. Кроме того, следует учесть плотность потока импульса $p_x s_z$, а также обратный процесс, при котором элемент dz' излучает фонон, а элемент dz его поглощает. Просуммировав вклады, происходящие от обмена всевозможными фононами, придем к выражению $Q(|\,z-z'|)[u(z)-u(z')]dzdz'$. Силу взаимодействия с границей можно определить, повторяя аналогичные рассуждения, с тем отличием, что вероятность поглощения фонона границей равна единице и граница не излучает неравновесные фононы.

Опуская простые вычисления, запишем результат для коэффициента теплопроводности κ в виде (C – удельная теплоемкость)

$$\kappa = Cs\frac{d^2}{l_N^{eff}}, \qquad l_N^{eff} \approx \begin{cases} (dl_N^3)^{1/4} & m = 4 \\ l_N \ln d/l_N, & m = 3 \\ l_N & m = 2 \end{cases} \tag{3}$$

Приведем также выражение для коэффициента затухания второго звука:

$$\operatorname{Im}\Omega/\Omega \approx \Omega\, l_N^{eff}(\lambda)/V.$$

Здесь Ω – частота, V – скорость второго звука, а $l_N^{eff}(\lambda)$ определяется формулами (3), в которых d заменено на длину второго звука $\lambda = 2\pi V\Omega^{-1}$. (Результат понятный: ПДФ, длина свободного пробега которых превосходит λ, не вносят существенного вклада в затухание).

Отметим, что имеющиеся экспериментальные данные не отвечают предсказаниям локальной гидродинамической теории ($m = 2$). Согласно последней $l_N^{eff} = l_N \sim T^{-5}$, тогда как обработка экспериментальных результатов по формуле $l_N^{eff} \sim T^{-a}$ во всех случаях дает $3 < a < 4$. К настоящему времени гидродинамические явления наблюдались в четырех веществах: ^4He, ^3He, Bi и NaF. Однако, надежные данные относительно температурной зависимости имеются только для ^4He и NaF [2]. По классификации Херринга этим веществам отвечает $m = 2$. Однако, для ^4He $\Delta p/p \lesssim 1/5$, а для NaF $\Delta p/p \lesssim 1/7$, и поэтому процесс Херринга имеет порог. Показатель $15/4 = 3{,}75$, к которому приводит наше рассмотрение при $m = 4$, весьма близок к экспериментально наблюдаемым результатам: $a \approx 3{,}71$ для NaF и $a = 3 \div 4$ для ^4He.

Более подробное изложение затронутых выше вопросов будет опубликовано в журнале "Физика низких температур".

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
5 декабря 1977 г.
После переработки
1 января 1978 г.

Литература

[1] Р.Н.Гуржи. УФН, 94, 689, 1968.

[2] H.Beck, P.T.Meier, A.Tellung. Phys. Stat. Sol., 24A, 10, 1974.

[3] C.Herring. Phys. Rev. 95, 954, 1954.

[4] Р.Н.Гуржи, А.О.Максимов. ФНТ, 3, 356, 1977.

[5] Р.Н.Гуржи, А.О.Максимов. ФНТ, 1, 1330, 1975.