Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 6, стр. 361 – 366 *20 марта 1978 г.*

О ВОЗБУЖДЕНИИ КОНВЕКТИВНЫХ ЯЧЕЕК АЛЬФВЕНОВСКИМИ ВОЛНАМИ

Р.З.Сагдеев, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко

Рассмотрен нелинейный механизм возбуждения конвективных движений альфвеновскими волнами. Определены соответствующие этому процессу инкременты параметрической неустойчивости, исследуется связанная турбулентность альфвеновских волн и конвективной моды. Рассмотрен также вопрос о рождении конвективных ячеек дрейфовой турбулентностью и их влияние на аномальную диффузию плазмы.

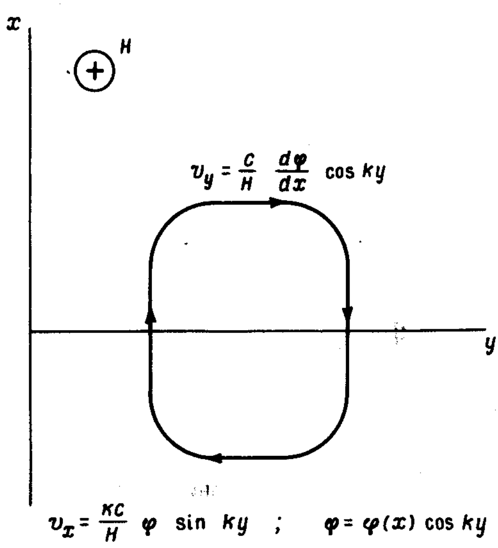
1. Известно, что в отсутствие конвективной неустойчивости соответствующая ей мода ($k_{\parallel} = 0$, $\mathrm{Re}\,\omega = 0$) медленно затухает за счет вязкости ($\mathrm{Im}\,\omega = -i\mu k_{\perp}^2$, μ – коэффициент вязкости). Однако, существует меха-

низм прямого рождения конвективных движений в результате нелинейного взаимодействия альфвеновских волн. В магнитной гидродинамике система уравнений для описания этого процесса имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mu\Delta\right)\Delta\phi = \frac{c}{H}\overline{\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right]\Delta_{\perp}\psi}; \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_A^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Delta_{\perp}\psi = \frac{c}{H}\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta\phi + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta_{\perp}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]. \tag{2}$$

В этих уравнениях поперечные компоненты электрического поля в альфвеновской волне, как обычно при $\beta = \frac{8\pi nT}{H^2} << 1$, представлены в виде $E_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\phi(x, y)$ – электростатический потенциал конвективной моды. Замкнутые ячейки в этой моде образуются в результате конвекции частиц в скрещенных $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ полях, как это показано на рисунке, и в значительной степени аналогичны двумерным вихрям в несжимаемой жидкости.



В исходных уравнениях учтена только нелинейность, ответственная за взаимодействие конвективной моды с альфвеновскими волнами. Конвективные ячейки рождаются в результате взаимодействия альфвеновских волн с одинаковыми ω и $k_{\parallel}$, соответственно этому черта в правой части уравнения (1) означает усреднение по быстрому времени $\sim 1/\omega$ и пространственному интервалу $\sim 1/k_{\parallel}$.

Простейший механизм нелинейного рождения конвективных движений — это параметрическая неустойчивость монохроматической альфвеновской волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{i(\mathbf{k}^o \mathbf{r} - \omega_A t)} + \text{к.с.}, \qquad \omega_A = k_\parallel^o v_A.$$

Как обычно при параметрической неустойчивости (см. например [1]) возбуждается конвективная мода с потенциалом

$$\phi = \phi_\mathbf{k} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp - \Omega t)} + \text{к.с.}$$

и два сателлита альфвеновских волн

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{E}_+ e^{i(k^o + \mathbf{k})\mathbf{r} - i\Omega t} + \mathbf{E}_- e^{i(\mathbf{k}^o - \mathbf{k})\mathbf{r} + i\Omega t}\right) e^{-i\omega_A t} + \text{к.с.}$$

Инкремент неустойчивости $\gamma = \operatorname{Im}\Omega$ без труда может быть получен из исходной системы уравнений:

$$\gamma_A^2 = v_E^2 [\mathbf{k}, \mathbf{k}^o]_z^2 \frac{1}{|\mathbf{k}_\perp^o|^2} \left(1 - \frac{|\mathbf{k}_\perp^o|^2}{k^2}\right) \left[\frac{|\mathbf{k}_\perp^o|^2}{2} \left(\frac{1}{|\mathbf{k}_\perp^+|^2} + \frac{1}{|\mathbf{k}_\perp^-|^2}\right) - 1\right], \quad (3)$$

где использованы обозначения $v_E = {}^{cE_o}/_H$, $\mathbf{k}_\perp^\pm = \mathbf{k}_\perp^o \pm \mathbf{k}$.

При учете дисперсии частоты альфвеновской волны, обусловленной конечностью ларморовского радиуса ионов, $\omega_{\mathbf{k}^o} = k_\parallel^o v_A (1 + k_\perp^{o\,2} \rho_i^2/2)$, $\rho_i^2 = {}^{T_e}/_{m_i \omega_{Hi}^2}$, дисперсионное уравнение параметрической неустойчивости записывается в виде:

$$\Omega = A \left[\frac{\Delta_-}{\omega_A \Delta_- + 2\Omega} \frac{1}{|\mathbf{k}_\perp^-|^2} - \frac{\Delta_+}{\omega_A \Delta_+ - 2\Omega} \frac{1}{|\mathbf{k}_\perp^+|^2}\right], \quad (4)$$

$$A = v_E^2 [\mathbf{k}, \mathbf{k}_o]_z^2 \frac{1}{|\mathbf{k}_\perp^o|^2 \rho_i^2} \left(1 - \frac{|\mathbf{k}_\perp^o|^2}{k^2}\right), \qquad \Delta_\pm = [|\mathbf{k}^\pm|^2 - |\mathbf{k}_\perp^o|^2] \rho_i^2.$$

Приближение магнитной гидродинамики $\rho_i \to 0$ к рассматриваемой задаче применимо только при достаточно больших амплитудах волны накачки $\frac{v_E}{v_A} > k^2 \rho_i^2$, когда из дисперсионного уравнения имеем инкремент (3) параметрической неустойчивости. В обратном предельном случае $\frac{v_E}{v_A} < k^2 \rho_i^2$ неустойчивость имеет место только для длинноволнового сателлита в достаточно узком интервале расстроек $\Delta_- \sim \frac{v_E^2}{v_A^2} \frac{1}{k^2 \rho_i^2}$

с максимальным значением инкремента нарастания:

$$\gamma_A^2 = \frac{A^2}{\omega_A^2 k^2}\left[\frac{1}{|\mathbf{k}_\perp^-|^2} - \frac{1}{|\mathbf{k}_\perp^+|^2}\right]. \tag{5}$$

2. Рассмотренная нами устойчивость создает дополнительный канал затухания альфвеновских волн за счет перекачки их энергии в конвективные ячейки. Такой канал может оказаться весьма существенным для солнечной короны, где один из наиболее вероятных механизмов нагрева плазмы связывается с быстрой диссипацией альфвеновских волн, выходящих из более глубоких областей Солнца [2]. Ситуация здесь несколько отличная от описанной выше неустойчивости монохроматической волны. В результате нелинейного взаимодействия волн в альфвеновской турбулентности возникает ансамбль конвективных ячеек различного масштаба. Рождение ячеек описывается уравнением:

$$\frac{d^2\phi_\mathbf{k}}{dt^2} + \mu k^2 \frac{d\phi_\mathbf{k}}{dt} + \frac{c^2}{2H^2}\frac{\phi_\mathbf{k}}{k^2}\int d\mathbf{g}\,\frac{[\mathbf{k},\mathbf{g}]_z^2}{|\mathbf{k}+\mathbf{g}_\perp|^2}\left[(\mathbf{g}_\perp^2 - \mathbf{k}^2)|E_\mathbf{g}|^2 - \right. \tag{6}$$

$$\left. - ((\mathbf{k}+\mathbf{g}_\perp)^2 - \mathbf{k}^2)|E_{\mathbf{k}+\mathbf{g}}|^2\right] = 0,$$

которое получено в предположении о случайных фазах альфвеновских волн и заменяет формулу (3) для инкремента параметрической неустойчивости монохроматической волны.

Последующая эволюция конвективной моды определяется двумя факторами: нелинейной спектральной перекачкой энергии с характерным инкрементом

$$\gamma_{NL} \sim \frac{c}{H} k^2 [k|\phi_\mathbf{k}|^2]^{1/2} \tag{7}$$

и затуханием за счет вязкости, существенным вне области источника.

Особенности конвективной турбулентности те же, что и в двумерной турбулентности несжимаемой жидкости. В [3,4], было показано, что в последнем случае сохранение вихря скорости, связанного с элементом жидкости, приводит к появлению потока энергии в область малых волновых чисел, проявляющегося в тенденции к объединению и укрупнению вихрей.

Описание связанной турбулентности альфвеновских волн и конвективных ячеек — чрезвычайно сложная задача. Мы ограничимся качественным анализом устанавливающегося в такой турбулентности квазистационарного состояния. В этом состоянии энергия возбуждаемых в результате какого-либо механизма линейной неустойчивости альфвеновских волн переходит согласно (6) в конвективные ячейки, затем откачивается с инкрементом (7) из области источника конвективной турбулентности и в конечном счете поглощается плазмой за счет вязкости. С помощью соответствующих условий баланса можно получить следующие оценки для квазистационарного уровня альфвеновских волн и конвективных движений

$$\int d\mathbf{k}\,|E_{\mathbf{k}}|^2 \sim H^2 \frac{\gamma_L^2}{k_A^2 c^2}\ , \quad \int d\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_\perp^4 |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \sim \frac{\gamma_L}{\mu}\int d\mathbf{k}\,|E_{\mathbf{k}}|^2 \qquad (8)$$

γ_L – икремент накачки энергии в альфвеновскую турбулентность.

3. Образование крупномасштабных вихрей – ячеек может оказаться весьма существенным для проблемы магнитного удержания плазмы, поскольку с их учетом должна быть пересмотрена построенная к настоящему времени теория аномальной диффузии. В этой проблеме конвективные ячейки возникают в результате нелинейного взаимодействия коротковолновых дрейфовых волн с законом дисперсии $\omega_D = -k_y D_Б \times \times \frac{d\ln n_o}{dx}(1 - k_\perp^2\rho_i^2)$, где обозначено $D_Б = \frac{cT_e}{eH}$ – бомовский коэффициент. Инкремент параметрической неустойчивости монохроматической дрейфовой волны, соответствующий этому процессу, равен:

$$\gamma_D^2 = \frac{D_Б^2}{4}\ \frac{T_e}{T_i}\ \frac{\mathbf{k}_o^2 - \mathbf{k}_1^2}{|\mathbf{k}_o - \mathbf{k}_1|^2}[\mathbf{k}_o, \mathbf{k}_1]_z^2 \left|\frac{\delta n}{n_o}\right|^2, \qquad (9)$$

$\mathbf{k}_o$, $\mathbf{k}_1$ – волновые вектора основной и пробной дрейфовых волн, имеющих одинаковые ω и $k_\parallel$, δn – модуляция плотности в основной волне. Наличием этой неустойчивости объясняются результаты численного эксперимента [5], в котором наблюдалось рождение конвективных ячеек коротковолновыми ($k\rho_i \sim 1$) дрейфовыми волнами. Инкремент неустойчивости (в условиях эксперимента $\gamma_D \sim {}^1/_{150}\,\omega_{pe}$) хорошо согласуется со временем возникновения ячеек ($\tau \sim 1000\omega_{pe}^{-1}$).

Таким образом, в проблеме магнитного удержания возникает задача о сильной турбулентности дрейфовых волн, обусловленной наличием их нелинейной связи с медленными движениями плазмы в конвективных ячейках. Основным в этой задаче является вопрос о конечном влиянии конвективных ячеек на перенос плазмы поперек магнитного поля. Результат существенно зависит от наличия перекрещенности силовых линий ("shear'а"). Наиболее эффективно диффузия на конвективных ячейках происходит в плазме с прямыми силовыми линиями магнитного поля. В этом случае в стационарном состоянии (накачка энергии в дрейфовую турбулентность с инкрементом γ_L компенсируется затуханием в конвективной моде с декрементом $\Gamma \sim Dk^2$, обусловленным диффузией) коэффициент диффузии плазмы оказывается весьма значительным:

$$D \sim D_Б \left[\frac{\gamma_L}{\omega_D}\ \frac{T_e}{T_i}\right]^{1/2}. \qquad (10)$$

В плазме с "shear'ом" рост $k_\parallel$ приводит к локализации конвективных ячеек в областях с поперечными размерами $\Delta x \sim \frac{\rho_i}{\theta}\sqrt{\beta}$, θ – "shear", предполагается, что $\beta > \frac{m_e}{m_i}$. Возникновение эффективной диффузии на конвективной моде возможно только в том случае, когда области локализации, соответствующие различным модам по k_z, перекрываются, для чего должно быть выполнено условие $^a/_R < k\rho_i \sqrt{\beta}$, ($a$ и R – соответственно малый и большой радиусы тороидальной ловушки).

Авторы благодарны А.Б.Михайловскому за обсуждение результатов работы.

Институт космических исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14 февраля 1978 г.

Литература

[1] А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 13, 603, 1973.

[2] С.Б.Пикельнер. Основы космической электродинамики. М., изд. Наука, 1966.

[3] L.Onsager, Statistical Hydrodynamics. Nuovo Cim. Suppl. 6, 279, 1949.

[4] Дж. Бэтчелор. Теория однородной турбулентности. М., ИИЛ, 1955.

[5] C.Z.Cheng, H.Okuda. Phys. Rev. Lett., 38, 708, 1977.