

## ТОЧНАЯ ДВУХЧАСТИЧНАЯ $S$ -МАТРИЦА КВАНТОВЫХ СОЛИТОНОВ МОДЕЛИ SINE-GORDON

А.Б.Замолодчиков

Построены точные и явные формулы для  $S$ -матричных элементов солитон-антисолитонного рассеяния. Эти формулы согласуются с теорией возмущений массивной модели Тирринга и с квазиклассическими выражениями.

Известно, что квантовая модель sine-Gordon, т. е. модель поля  $\Phi(x)$  в  $(1+1)$ -мерном пространстве – времени, описываемая плотностью Лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} \cos(\beta \Phi) \quad (1)$$

имеет бесконечное число законов сохранения [1, 2]. Это обстоятельство накладывает строгие ограничения на свойства рассеяния частиц в этой модели. Именно, набор частиц, составляющих конечное состояние рассеяния и набор их импульсов совпадают с набором частиц и набором их импульсов в начальном состоянии, т. е. частицы в процессе рассеяния могут только обмениваться импульсами [3 – 6].

Спектр частиц модели (1) состоит из солитона  $A$ , антисолитона  $\bar{A}$  и некоторого (зависящего от величины  $\beta^2$ ) числа солитон-антисолитонных связанных состояний  $C_n$ . Массы последних даются формулой [3, 7]:

$$m_n = 2m \sin^{ny/16}; \quad n = 1, 2, \dots < 8\pi/\gamma, \quad (2)$$

где  $m$  – масса солитона, а  $\gamma = \beta^2 [1 - \beta^2/8\pi]^{-1}$ .

$S$  – матричный элемент для двухчастичного рассеяния  $A + \bar{A}$  включает две компоненты  $S_1(s)$  и  $S_2(s)$  ( $s = (p_1 + p_2)^2$ ,  $p_1$  и  $p_2$  – импульсы начальных частиц), описывающих соответственно два канала реакции  $A + \bar{A}$ : рассеяние вперед (РВ) и рассеяние назад (РН).  $S_1(s)$  и  $S_2(s)$  есть аналитические функции комплексного  $s$  на плоскости с двумя разрезами вдоль вещественной оси  $s \leq 0$  и  $s \geq 4m^2$ .

Так как амплитуды рассеяний  $A + \bar{A}$  и  $A + A$  удовлетворяют только двухчастичным условиям унитарности, то пороговые точки  $s = 0$  и  $s = 4m^2$  являются корневыми точками ветвления второго порядка функций  $S_1(s)$  и  $S_2(s)$  (точка ветвления  $s = \infty$  имеет, вообще говоря, логарифмический характер). Поэтому, если воспользоваться переменной

$$\theta = \ln \frac{s - 2m^2 + \sqrt{s(s - 4m^2)}}{2m^2}, \quad (3)$$

то функции  $S_1(\theta)$  и  $S_2(\theta)$  станут мероморфными функциями  $\theta$ .

Преобразование (3) отображает физический лист  $s$ -плоскости на полосу  $0 \leq \text{Im}\theta \leq \pi$ , причем берега правого и левого разрезов этого листа отображаются на оси  $\text{Im}\theta = 0$  и  $\text{Im}\theta = \pi$  соответственно. Таким образом рассеяние  $A + \bar{A}$  ( $s$ -канал) описывается значениями  $S_1(\theta)$  и  $S_2(\theta)$  на полуоси  $\text{Im}\theta = 0$ ,  $\text{Re}\theta > 0$ , а рассеяние  $A + A$  ( $u$ -канал для РВ) — значениями  $S_1(\theta)$  на полуоси  $\text{Im}\theta = \pi$ ,  $\text{Re}\theta < 0$ . Для РН  $u$ -канал совпадает с  $s$ -каналом, поэтому соотношение кроссинг-симметрии для  $S_2(\theta)$  есть

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta). \quad (4)$$

Условия унитарности для рассеяний  $A + \bar{A}$  и  $A + A$  можно представить в следующем аналитическом виде:

$$\begin{aligned} S_1(\theta)S_1(-\theta) + S_2(\theta)S_2(-\theta) &= 1, \\ S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_1(-\theta)S_2(\theta) &= 0, \\ S_1(\theta)S_1(2\pi i - \theta) &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

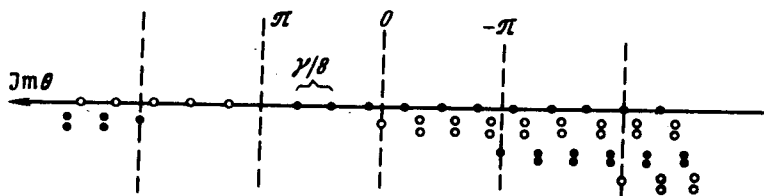
Формула (2) означает, что на отрезке  $0 < \text{Im}\theta < \pi$  мнимой оси  $\theta$ -плоскости в точках

$$\theta_n = i\pi - in\gamma/\theta; \quad n = 1, 2, \dots < 8\pi/\gamma \quad (6)$$

находятся полюса, соответствующие связанным состояниям  $C_n$ . При  $\gamma = 8\pi/N$ , где  $N = 1, 2, \dots$  происходит распад  $N$ -го связанного состояния, т. е. соответствующий полюс покидает полосу  $0 < \text{Im}\theta < \pi$ . Корепин и Фаддеев [3] предположили, что при  $\gamma = 8\pi/N$  точное выражение для  $S_1(\theta)$  есть:

$$S_1(\theta) = e^{iN\pi} \prod_{n=1}^N \frac{e^{\theta - i\frac{\pi n}{N}}}{e^{\theta} + e^{-i\frac{\pi n}{N}}}. \quad (7)$$

Это предположение подтверждается квазиклассическим выражением для функции  $S_2(\theta)$  [8], которая обращается в нуль при  $\gamma = 8\pi/N$  (при условии  $S_2(\theta) \equiv 0$  формула (7) есть следствие (5) и (6)).



Картина особенностей  $S_1(\theta)$ : крестики обозначают нули, точки обозначают полюса. Часть нулей и полюсов для наглядности смещена с мнимой оси. В действительности все особенности находятся при  $\text{Re}\theta = 0$

Считая выражение (7) точным, попытаемся восстановить  $S_1(\theta)$  и  $S_2(\theta)$  при произвольном  $\gamma$ . Так как в канале  $A + \bar{A}$  нет резонансов [7], то

формула (6) означает, что  $S_1(\theta)$  имеет серию полюсов  $\theta_n = i\pi - in\gamma/8$ ,  $n = 1, 2, \dots$  до  $\infty$ . При  $\gamma = 8\pi/N$  в полосе  $-\pi < \text{Im}\theta < 0$  есть нули  $S_1(\theta)$  в точках  $-i^{n\pi}/N$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$  (см. (8)). Поэтому при произвольном  $\gamma$  функция  $S_1(\theta)$  должна иметь нули в точках  $-in'\gamma/8$ ,  $n' = 0, 1, 2, \dots$  до  $\infty$ , причем первый ноль ( $n' = 0$ ) простой, а остальные — двойные. Аналогичное рассмотрение в полосах  $-l\pi < \text{Im}\theta < (l-1)\pi$ ,  $l = 1, 2, \dots$  и использование условий (5) дает картину нулей и полюсов  $S_1(\theta)$ , изображенную на рисунке. Соответствующее аналитическое выражение есть

$$S_1(\theta) = -\frac{i}{\pi} \text{sh}\left(\frac{8\pi}{\gamma}\theta\right) U(\theta), \quad (8)$$

где

$$U(\theta) = \Gamma\left(\frac{8\pi}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 + i\frac{8\theta}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 - \frac{8\pi}{\gamma} - i\frac{8\theta}{\gamma}\right) \prod_{l=1}^{\infty} \frac{\text{Re}(\theta) \text{Re}(i\pi - \theta)}{\text{Re}(0) \text{Re}(i\pi)}, \quad (9)$$

$$\text{Re}(\theta) = \frac{\Gamma\left(2l\frac{8\pi}{\gamma} + i\frac{8\theta}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 + 2l\frac{8\pi}{\gamma} + i\frac{8\theta}{\gamma}\right)}{\Gamma\left((2l+1)\frac{8\pi}{\gamma} + i\frac{8\theta}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 + (2l-1)\frac{8\pi}{\gamma} + i\frac{8\theta}{\gamma}\right)}$$

Условия (5) будут выполнены, если

$$S_2(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{8\pi}{\gamma}\theta\right) U(\theta). \quad (10)$$

Это выражение автоматически удовлетворяет кроссинг-симметрии (4).

При  $\gamma \rightarrow 0$  функции (8) и (10) переходят в известные квазиклассические выражения для солитонной  $S$ -матрицы [3, 9].

Согласно [10] модель (1) эквивалентна массивной модели Тирринга (ММТ), причем солитоны являются основными фермионами ММТ. При  $\gamma \rightarrow 8\pi$  формулы (8), (10) можно разложить по степеням  $2g/\pi = (8\pi/\gamma) - 1$  ( $g$  — константа связи ММТ) и сравнить с результатами теории возмущений ММТ. Такое сравнение проводилось до порядка  $g^2$  и было найдено совпадение.

Автор благодарен В.М.Грянику, М.И.Поликарпову, Ю.А.Симонову и К.А.Тер-Мартиросяну за полезные обсуждения.

Институт теоретической  
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию  
14 апреля 1977 г.

### Литература

- [1] Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 21, 160, 1974.
- [2] П.П.Кулиш, Е.Р.Нисимов. Письма в ЖЭТФ, 24, 247, 1976.
- [3] В.Е.Корепин, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 25, 147, 1975.
- [4] И.Я.Арефьева, В.Е.Корепин. Письма в ЖЭТФ, 20, 680, 1974.

- [ 5 ] С.Н. Вергелес, В.М.Гряник. ЯФ, 23, 1324, 1976.
- [ 6 ] В. Berg, М. Karowski, Н. - J. Thun. Phys. Lett., 63B, 63, 1976;  
63B, 187, 1976.
- [ 7 ] R. Dashen, В. Hasslacher, А. Neveu. Phys. Rev. D11, 3424, 1975.
- [ 8 ] В.Е.Корепин. Письма в ЖЭТФ, 23, 224, 1976.
- [ 9 ] R. Jackiw, G. Woo. Phys. Rev., D12, 1643, 1975.
- [ 10 ] S. Coleman. Phys. Rev., D11, 2088, 1975.
-