Письма в ЖЭТФ, том 25, вып. 11, стр. 520 – 524 *5 июня 1977 г.*

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И СИЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В СРЕДАХ С ИНВЕРСНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Л.И.Рудаков, В.Н.Цытович

Модуляционная неустойчивость колебания с частотой вида $\omega = \omega_0(n) - a\omega_0/2k^2$ может привести к возникновению солитонов, характерной чертой которых является наличие изломов или скачков электрического поля; из-за этого солитоны затухают на тепловых частицах.

Частотой $\omega = \omega_0(n) - a\omega_0/2k^2$ описываются ионные ленгмюровские колебания $\left(\omega_0^2 = 4\pi n e^2/M,\ \ a = r_D^{-2} \equiv 4\pi n e^2/T_e,\ 1 << k^2 r_D^2 << (T_e/T_i)^{1/2}\right)$, коротковолновые электронные ленгмюровские колебания в плазме с добавкой $n' << n$ горячих электронов $(\omega_o^2 = 4\pi ne^2/m,\ a = n'T/2nr_D^2 T',$ $(n'T'/nT)^{1/2} >> k^2 r_D^2\ T'/T >> 1)$, в магнитном поле желобковые колебания вблизи частоты $\omega_o^2 = \omega_{pi}^2 (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{He}^2)^{-1}$ $(a = -M/m k_z^2,\ \omega_{He}/v_{Te} >> k >> k_z\sqrt{M/m},\ \omega_{pe}/c)$.

Для таких колебаний возможна модуляционная неустойчивость. Природу ее легко понять из следующих рассуждений. Пусть широкий пакет волн с амплитудой E и волновым вектором k проходит через область с $\delta n < 0$. Групповая скорость волн при этом уменьшается $\delta\, \partial\omega/\partial k = -3a\omega_o k^{-4}\delta k = \partial\omega/\partial n\ \delta n/k$, так как $\delta\omega = \partial\omega_o/\partial n\ \delta n + a\omega_o/k^3\,\delta k = 0$. Следовательно, $\delta E^2 = -E^2 \delta\, \partial\omega/\partial k \Big/ \partial\omega/\partial k = -E^2\, 3/a\ \partial\ln\omega_o/\partial n\ k^2 \delta n$. Действие избыточного давления ВЧ поля $-\nabla |E|^2/4\pi$ приведет к дальнейшему уменьшению плотности в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta n - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta n = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{|E|^2}{4\pi M}\ . \qquad (1)$$

Из решения усредненного по частоте ω_o уравнения для комплексной амплитуды E [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2i\frac{\partial E}{\omega_o \partial t} - 2\frac{\partial\omega_o}{\partial n}\delta n E\right) = aE\ . \qquad (2)$$

Легко получить выражение для инкремента неустойчивости γ периодической волны, модулированной возмущением с волновым вектором q. Так в пределе $q << k,\ \gamma^2 << q^2 C_s^2$

$$\left(\frac{\gamma}{\omega_o}\right)^2 = q^{-4}\left[\frac{E^4 k^4}{(\pi nT)^2}\frac{d\ln\omega_o}{d\ln n} - a^2\right]. \qquad (3)$$

Как и в случае обычной ленгмюровской турбулентности $(n'T' << nT)$ существуют решения ур. (1) и (2) $E(x,t) = e^{iqx - i\Omega t}E(x - at)$, описывающие стационарные модулированные волны и, как предел, солитоны [2].

Для случая $q << \partial/\partial x\ \ln E(x - at)$, солитоны описываются уравнением

$$\left(e^2 - \frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{de}{d\xi}\right)^2 = e^2(1 - e^2),\qquad e^2 = \frac{3E^2}{8\pi T\Omega}\frac{d\omega_o}{dn}\left(\frac{a^2}{C_s^2} - 1\right)^{-1},$$

$$\xi^2 = \frac{(x - at)^2 a\omega_o}{8\Omega}\ . \qquad (4)$$

Характерной чертой решений ур. (4) является $\frac{de}{d\xi} \sim (\xi - \xi_o)^{-1/2}$ при $e^2 \to 1/2$. В этой области уравнение (2) должно быть дополнено членами с высшими производными в левой части: типа $-\frac{T}{m\omega_o^2} \frac{\partial^4 E}{\partial x^4}$, ограничивающими значение $\partial E/\partial x$. Наличие большой производной приводит к затуханию колебаний на тепловых частицах. Коротковолновая составляющая в фурье-разложении спектра решения ур. (4) может быть оценена как $E_k \approx E_o k_o^{1/2}/k^{3/2}$, где E_o, k_o^{-1} – амплитуда и ширина модуляции, связанные соотношением:

$$E_o^2 k_o^2 = \frac{\pi}{3} nTa\left(\frac{a^2}{C_s^2} - 1\right)\left(\frac{d\ln\omega_o}{d\ln n}\right)^{-1}. \qquad (5)$$

Подставляя значение E_k в квазилинейное уравнение для тепловых электронов и ионов, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = N\pi \frac{e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \int |E_k|^2 \delta(\omega_o - kv)dk \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad (6)$$

откуда следует (N – плотность модуляций, солитонов)

$$\frac{\partial}{\partial t} nT = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{E_o^2}{8\pi} \frac{N}{k_o} = \frac{N}{k_o} \frac{E_o^2}{8\pi} \omega_o \frac{k_o^2 v_T^2}{\omega_o^2}. \qquad (7)$$

Решения с $q << k_o$, описываемые ур. (4) – (7) существуют, если $a\left(\frac{a^2}{C_s^2} - 1\right)\frac{\partial \ln\omega_o}{\partial\ln n} > 0$. Для электронной ветки это условие выполняется при $a > C_s$, для ионных желобковых колебаний в магнитном поле при $a < C_s$ $\left(\frac{\partial\ln\omega_o}{\partial n} = \frac{1}{2}\omega_H^2(\omega_p^2 + \omega_H^2)^{-1}\right)$ и не выполняется для коротковолновых ионных ленгмюровских колебаний.

Уравнения (1), (2) имеют также решения типа волновых пакетов. $q > \frac{\partial}{\partial x} \ln E(x - at)$. Интересен их вид в пределе, когда

$$\Omega = -\frac{9a}{16q^2}\omega_o(1+\epsilon) + \frac{1}{4}qa, \quad \epsilon << 1,$$

$$(g^2 - 1)^2\left(\frac{dg}{dx}\right)^2 = \frac{q^2}{9} g^2[(g^2 - 1)^2 - \epsilon^2],$$

$$g^2 = \frac{E^2}{2\pi T}\;\frac{\partial \ln \omega_o}{\partial n}\;\frac{8q}{3\left(a - \frac{4q^3 a}{\omega_o}\right)}\left(1 - \frac{a^2}{C_s^2}\right)^{-1} \tag{8}$$

$$g = \begin{cases} \exp\left(-\frac{q}{3}\,|x - at|\right) & 1 - g^2 >> \epsilon \\ 1 - \left[\frac{q^2}{9}(x - at)^2 + \frac{\epsilon^2}{4}\right]^{1/2}, & 1 - g^2 << 1 \end{cases} \tag{9}$$

Это решение в отличие от (4) имеет только скачок производной в области $qx \lesssim 3$, но также содержит коротковолновые, $k \lesssim q/3$, составляющие в фурье-разложении, $E_k = \frac{q}{3} E_o \left[\left(\frac{q}{3}\right)^2 + (k - q)^2\right]^{-1}$, что приводит к его затуханию на тепловых частицах по закону (сравни с (6), (7))

$$\frac{\partial}{\partial t} nT = -\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{E_o^2}{8\pi}\,\frac{3N}{q} = \frac{3N}{q}\,\omega_o\left(\frac{q v_T}{\omega_o}\right)^3 \frac{E_o^2}{8\pi}\;. \tag{10}$$

Формулы (8) – (10) описывают поведение коротковолновых ионных ленгмюровских колебаний и дозвуковых пакетов электронных ленгмюровских колебаний при наличии горячих электронов.

В отличие от ленгмюровских солитонов солитоны, описываемые ур. (4) и (8) не могут коллапсировать [1], так как их амплитуда пропорциональна ширине.

Перечислим некоторые явления, где рассмотренные модуляции колебаний и плотности плазмы могут иметь место:

1) убегающие электроны в токамаках могут раскачивать модифицированные электронные ленгмюровские волны и греть основную массу электронов.

2) Сильноточные пучки электронов на последней стадии квазилинейной релаксации, если $n_b m v_b^2 > nT$, могут греть плазму.

3) В результате образования энергичной компоненты при возбуждении ленгмюровской турбулентности пучками электронов и света и достижении условия $n' T' > nT$ может измениться характер турбулентности.

4) При возбуждении током сильной ионно-звуковой турбулентности может осуществляться нагрев основной массы ионов. Покажем, как можно оценить величину установившейся токовой скорости u при турбулентном нагреве. Из баланса импульса для ионов следует:

$$enE_{\text{внеш}} = M\frac{d}{dt}\int v\, f_i\, dv = 3N\frac{E_o^2 q}{8\pi}\,\frac{q^2 v_{Ti}^2}{\omega_{pi}^2} \approx \frac{d}{dt}\, nT_i\,\frac{1}{v_{Ti}}\;.$$

Так как $\frac{dT_e}{dt} = euE_{\text{внеш}}$, то $\frac{T_i}{T_e} \approx \frac{v_{Ti}}{u}$ или $\frac{T_e}{T_i} \approx \frac{u^2}{C_s^2}$. Затухание солитонов на ионах должно уравновешиваться накачкой их током. Откуда $\frac{u}{v_{Te}} \approx \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} (qr_D)^5$. Комбинируя эти соотношения, получим

$$\frac{u}{v_{Te}} \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} qr_D \ .$$

Поступила в редакцию
17 апреля 1977 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
[2] Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 207, 821, 1972.