Письма в ЖЭТФ, том 25, вып. 12, стр. 589 – 593 *20 июня 1977 г.*

О ПУЛЬСИРУЮЩИХ СОЛИТОНАХ

С.В.Манаков

Построены пульсирующие решения классических уравнений нейтральных скалярных полей. В нерелятивистском приближении в квантовой теории им отвечают связанные состояния большого числа бозонов. В квазиклассическом приближении вычислена энергия N-частичного связанного состояния.

Вопрос о структуре связанных состояний в теории поля непосредственно связан с проблемой перечисления солитоноподобных решений соответствующих классических уравнений [1]. По крайней мере в квазиклассическом приближении, каждому семейству устойчивых периодических во времени решений с конечной энергией отвечает набор (в общем случае метастабильных) связанных состояний, выделяемых квазиклассическим правилом квантования. Принципиальный характер вопроса, а также практически полное отсутствие необходимой аналитической техники стимулировали проведение серии численных экспериментов, выполненных в последнее время различными авторами [2,3]. Были обнаружены, например, долгоживущие пульсирующие решения уравнения поля Хиггса, хорошо локализованные в пространстве и весьма близкие к периодическим во времени. В квантовой теории таким решениям должны отвечать резонансы.

В настоящей работе предлагается аналитическая интерпретация некоторых из решений такого рода. Мы будем рассматривать лагранжианы вида $L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2\phi^2}{2} - f(\phi)$ с произвольным взаимодействием $f(\phi)$, удовлетворяющим условию $m^2\phi^2/2 + f(\phi) \geqslant 0$, обеспечивающим положительность энергии

$$H = \int\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{2} + \frac{m^2\phi^2}{2} + f(\phi)\right)d\vec{x}. \qquad (1)$$

Нас интересует устойчивое решение уравнений

$$\phi_t = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \qquad \pi_t = -\frac{\delta H}{\delta \phi}, \qquad (2)$$

такое, что $\phi(t+T) = \phi(t)$ и $H[\pi, \phi] < \infty$.

Известно единственное обстоятельство, позволяющее гарантировать устойчивость локализованного решения. Это существование дополнительного интеграла движения, такого, что предъявляемое решение реализует минимум энергии при фиксированном значении интеграла. Уравнения же (2) в общем случае имеют лишь тривиальные первые интегралы – импульс и момент, не имеющие отношения к рассматриваемой задаче. Тем не менее, интересующий нас интеграл можно указать если не на всем фазовом пространстве системы (2) то, по крайней мере, в области последнего, состоящей из медленно меняющихся с x функций π, ϕ. Фурье-образы таких функций локализованы в малой ($\sim k_0 << m$) окрестности нуля импульсного пространства, т. е. поле составлено из медленных частиц, кинетическая энергия которых не превосходит $k_0^2/2m$. Поскольку в классике спонтанные процессы отсутствуют, и при столкновении частиц вновь рожденные частицы так же должны иметь импульсы не превосходящие k_0, то процессы с изменением числа частиц, например $n \leftrightarrow n+1$, возможны лишь если $n > 2m^2/k_0^2$. Соответствующий фазовый объем экспоненциально зависит от n, поэтому в указанной области фазового пространства число частиц сохраняется с экспоненциальной точностью по k_0^2/m^2. Этим интегралом мы и воспользуемся.

Сказанному можно придать точный смысл. Существует асимптотическое по параметру $\vec{\nabla}^2/m^2$ каноническое преобразование от переменных $\pi(x)$, $\phi(x)$ к комплексным переменным $\psi(x)$, $\psi^*(x)$ такое, что гамильтониан (1) представляется в виде

$$H = \int\{F(|\psi|^2) + A(|\psi|^2)|\nabla\psi|^2 + [B(|\psi|^2)\psi^{*2}(\nabla\psi)^2 + \text{к.с.}]\}dx + O\left(\frac{\nabla^4}{m^4}\right). \qquad (3)$$

и сохраняет интеграл $N = \int|\psi|^2 dx$ ("число частиц"). Уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$i\psi_t = \delta H/\delta\psi^* . \qquad (4)$$

Фигурирующие в (3) функции F, A, B могут быть вычислены в явном виде по данному взаимодействию $f(\phi)$. Рассматривая, например, решения (2) не зависящие от x, легко видеть что обратная к $F(\xi)$ функция $\xi(F)$ дается интегралом

$$\xi(F) = \frac{1}{\pi} \int \sqrt{2F - m^2\phi^2 - 2f(\phi)}\, d\phi, \tag{5}$$

где интегрирование ведется между нулями подкоренного выражения (для определенности мы ограничимся случаем монотонной зависимости $f'(\phi) + m^2\phi$ от ϕ). Выражения для A и B нам не потребуются. Отметим лишь, что при $\xi \to 0$ $A(\xi) \to (2m)^{-1}$.

Периодическим решениям (2) отвечают решения (4) вида $\psi(\mathrm{x}, t) = \phi(\mathrm{x})\, e^{-i\omega t}$. Функция ϕ подчиняется уравнению

$$\omega\, \phi = \delta H / \delta \phi^* \tag{6}$$

и реализует минимум H при фиксированном N, т. е. $\delta(H - \omega N) = 0$. Требование минимальности при этом эквивалентно условию устойчивости решения.

Структура решений (6) легко выясняется при больших N. В этом случае главный вклад в H (3) вносит член $H_0 = \int F(|\psi|^2)\, d\mathrm{x}$. Минимизация H_0 приводит к тому, что $|\psi|^2$ равно n_0 внутри шара радиуса $R = \left(\frac{3}{4\pi}\, \frac{N}{n_0}\right)^{1/3}$ и $|\psi|^2 = 0$ снаружи. При этом n_0 является положительным корнем уравнения

$$\frac{d}{d\xi}\, \frac{F(\xi)}{\xi} = 0,$$

если таковой существует. При малых ξ $F(\xi) = m\xi + O(\xi^2)$, если же $f(\phi)$ — полином степени $2K$, то при больших ξ из (5) $F \sim \xi^2(K/K+1)$; поэтому нетривиальный минимум функции $F(\xi)\xi^{-1}$ существует, если $F''(\xi)|_{\xi=0} < 0$. Это неравенство представляет собой условие существования интересующих нас решений. При этом $H_0 = F(n_0)n_0^{-1} N < mN$. Учет остальных членов в H (3), содержащих производные ψ, приводит к "размыванию" границы шара на размер порядка $l^{-1} \sim m(1 - F(n_0)n_0^{-1} m^{-1})^{1/2}$; соответствующий вклад в энергию пропорционален объему, в котором существенны градиенты ψ, т. е. $4\pi R^2 l$. Таким образом, при достаточно больших N

$$E(N) = \min H(\psi, \psi^*)\big|_N = F(n_0)\, n_0^{-1} N + a N^{2/3}. \tag{7}$$

В трехмерной геометрии устойчивые решения (6) существуют лишь при $N \geqslant N_c$; N_c может быть грубо оценено из равенства $E(N_c) = mN_c$ (7) справедливо при $N >> N_c$.

До сих пор речь шла о решениях классических уравнений. Однако указанное решение имеет ясную квантовую интерпретацию. В квазиклассическом приближении квантование инвариантно относительно канонических преобразований; в переменных же ψ, ψ^* квантование формулы (7) состоит в замене параметра N в последней целыми числами. (7) дает тогда энергию связанного состояния N частиц ($N > N_c$). При $N \gg N_c$ это состояние имеет структуру капли бозе-жидкости. Капельный характер связанного состояния большого числа бозонов при наличии парного притяжения и трехчастичного отталкивания уже обсуждался [4] на примере одномерной нерелятивисткой модели.

Несохранение N, связанное с асимптотическим характером преобразования $\pi, \phi \leftrightarrow \psi, \psi^*$ приводит к "испарению" капли. При этом скорость испарения будет экспоненциально мала, если решение содержится в указанной выше области фазового пространства. Последнее имеет место, если $lm \gg 1$. Это неравенство выполняется, например, для взаимодействий вида $f(\phi) = -\lambda\phi^4 + c\,\phi^6$ при достаточно малых λ; в общем случае для этого необходима малость парного притяжения по сравнению с многочастичным отталкиванием.

В заключение отметим следующее. При $|\psi|^2 \ll n_0$ разлагая F с точностью до членов второго порядка и заменяя A в (3) на $(2m)^{-1}$ получим из (4)

$$i\psi_t = m\psi - \frac{1}{2m}\Delta\psi + \frac{F''(0)}{2}|\psi|^2\psi \; .$$

Решения этого уравнения вида $\psi = \phi\, e^{-i\omega t}$ использовались в качестве первого приближения для пульсирующих солитонов уравнений (2) как в одномерной [5], так и в трехмерной [2, 3] ситуациях. Однако эти случаи принципиально различны. Если в одномерной геометрии солитоны устойчивы и реализуют минимум энергии $H = \int\left(m|\psi|^2 + \frac{1}{2m}|\vec\nabla\psi|^2 + \frac{F''}{2}|\psi|^4\right)dx$ при фиксированном N, то в трехмерном пространстве имеет место экспоненциальная неустойчивость солитона. Инкремент неустойчивости порядка $|\omega - m|$. Сам факт неустойчивости следует уже из того, что на таких решениях $H > mN$, т. е. солитон не есть связанное состояние [6].

Неустойчивость трехмерных солитонных решений с амплитудой меньшей некоторой критической была обнаружена в [2] (1977) численным методом.

Я благодарен В.Е.Захарову за полезное обсуждение и И.Ю.Кобзареву за стимулирующую дискуссию.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 апреля 1977 г.

Литература

[1] Л.Д.Фаддеев. Письма в ЖЭТФ, 21, 143, 1975; А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, 430, 1975.

[2] И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. Письма в ЖЭТФ, 24, 15, 1976; Письма в ЖЭТФ, 25, 120, 1977.

[3] Н.А.Воронов, И.Ю.Кобзарев. Письма в ЖЭТФ, 24, 576, 1976.

[4] А.С.Ковалев, А.М.Косевич. Физика низких температур, 2, 913, 1976.

[5] R.Dashen, B.Hasslaher, A.Neveu. Phys. Rev., D11, 3424, 1975.

[6] В.Е.Захаров, В.В.Соболев. В.С.Сынах. ПМТФ, №1, 92, 1972.