Письма в ЖЭТФ, том 25, вып. 12, стр. 603 – 607 *20 июня 1977 г.*

МНОГОМЕРНЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ И УРАВНЕНИЯ ДУАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОЛЯ ЯНГА – МИЛЛСА

А.А.Белавин, В.Е.Захаров

Предложен общий метод решения нелинейных уравнений с произвольным числом переменных с помощью метода обратной задачи рассеяния. Метод применим к нелинейным уравнениям, которые могут быть получены как условие совместности систем линейных уравнений. В качестве приложения метода найдены наиболее общие – инстантонные решения уравнений дуальности для полей Янга – Миллса.

1. До сих пор сфера применимости метода обратной задачи рассеяния ограничивалась лишь интегрированием уравнений, содержащих две или три независимые переменные [1, 2]. В настоящей работе мы покажем,что существует вариант метода обратной задачи рассеяния,позволяющий интегрировать уравнения произвольной размерности. Простейшим примером интегрируемых уравнений такого рода являются уравнения дуальности для поля Янга – Миллса [3]

$$F_{\mu\nu} = a F^*_{\mu\nu} = \frac{a}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \qquad a = \pm 1, \tag{1}$$

где $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$, $\mu, \nu = 1, \ldots 4$, $\quad \nabla_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + A_\mu$.

Уравнения (1) рассматриваются в четырехмерном евклидовом пространстве. Физический смысл имеют их ограниченные решения, стремящиеся при $r^2 = \Sigma x_i^2 \to \infty$ к свободным полям

$$A_\mu \to -\frac{\partial g}{\partial x_\mu} g^{-1} \qquad F_{\mu\nu} \to 0. \tag{2}$$

Эти решения представляют собой классические подбарьерные траектории, возникающие при квазиклассическом вычислении квантовых амплитуд перехода между неэквивалентными вакуумами [4]. Их рассмотрение может играть фундаментальную роль в проблеме невылетания кварков. Асимптотическое состояние g характеризуется топологическим зарядом

$$n = \frac{1}{8\pi^2} \int \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathrm{Sp}\, l_\alpha l_\beta l_\gamma d^2 x \qquad l_\alpha = g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_\alpha}.$$

Здесь интегрирование ведется по бесконечно удаленной трехмерной сфере. n есть целое число, знак его совпадает со знаком a. Как было показано Шварцем [10], многообразие таких решений конечномерно и имеет размерность $8|n|$. Ограниченные решения с $n = \pm 1$ называются инстантонами [3], при $|n| > 1$ – n-инстантонными решениями. Отдельные серии n-инстантонных решений (размерности не более $5n$) были найдены в работах [4 – 7].

2. Нелинейные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, возникают как условие совместности двух линейных уравнений,содержащих спектральный параметр λ или дифференцирование по дополнительной переменной $\partial/\partial\xi$. Ранее уже рассматривался случай, когда эта зависимость была рациональна [8, 9]. Покажем, что случай рациональной зависимости допускает многомерное обобщение.

Рассмотрим пару совместных дифференциальных уравнений первого порядка

$$L_1 \Psi = 0 \qquad\qquad L_2 \Psi = 0$$

$$L_1 = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\nabla n}{\lambda - \lambda_n} + \nabla_0; \qquad L_2 = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\tilde{\nabla} n}{\lambda - \lambda_n} + \tilde{\nabla}_0. \tag{3}$$

Здесь $\nabla_n = \frac{\partial}{\partial z_n} + U_n$, $\widetilde{\nabla}_n = \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}_n} + \widetilde{U}_n$, U_n, $\widetilde{U}_n$ – матрицы n-го порядка, зависящие от z_n, $\widetilde{z}_n$. Все переменные z_n, $\widetilde{z}_n$ вообще говоря независимы. Условие совместности уравнений (3) имеет вид

$$[L_1, L_2] = 0 \tag{4}$$

и представляет собой набор $N_1 + N_2 + 1$ уравнений на $N_1 + N_2 + 2$ величин U_n, $\widetilde{U}_n$. Неопределенность этой системы связана с ее калибровочной инвариантностью относительно преобразования

$$U_n \to g^{-1} \frac{\partial g}{\partial z_n} + g^{-1} U_n g. \tag{5}$$

3. Положим $L = \lambda \nabla_1 + \nabla_2^+$, $L_2 = \lambda \nabla_2^+ - \nabla_1$, где $\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} + B_1$; $\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial z_2} + B_2$; $\nabla_1^+ = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - B_1^+$; $\nabla_2^+ = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - B_2^+$; $z_1 = \frac{1}{2}(x + ix_2)$; $z_2 = \frac{1}{2}(x_3 + ix_4)$; $B_1 = A_2 - iA_1$; $B_2 = A_4 - iA_3$. Подставляя в (4), мы получим систему уравнений (1) при $a = -1$ (уравнение антидуальности). Аналогично, полагая $L = \lambda\nabla_1 + \nabla_2$, $L_2 = \lambda\nabla_2^+ - \nabla_1^+$, получим уравнение дуальности ($a = 1$). Для интегрирования уравнений (4) может быть применен метод задачи Римана, развитый в [8, 9], кроме того можно элементарно найти частные (n-солитонные) решения требованием рациональности матричной функции Ψ по λ. Для нахождения этих решений заметим, что

$$U_o + \sum \frac{U_n}{\lambda - \lambda_n} = -L_o^{(1)} \Psi\Psi^{-1}; \quad L_o^{(1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\frac{\partial}{\partial z_n}}{\lambda - \lambda_n} + \frac{\partial}{\partial z_o}.$$

Аналогичное уравнение следует из $L_2\Psi = 0$. Потребуем чтобы выражение $L_o^{(1)} \Psi\Psi^{-1}$ имело полюса только в точках $\lambda = \lambda_n$, а $L_o^{(2)} \Psi\Psi^{-1}$ – в точках $\lambda = \widetilde{\lambda}_n$. Эти требования накладывают конечное число условий на вычеты матричной функции Ψ в ее полюсах и очевидно, дает точное решение системы (4). Таким путем могут быть найдены n-солитонные решения во всех уравнениях, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.

4. При построении n-инстантонных решений оказалось, что весьма жесткие требования на вид зависимости λ налагает условие ограниченности решения при всех x_i. Оказывается, что n-инстантонному решению соответствует функция Ψ, имеющая полюса n-го порядка при $\lambda = 0, \infty$. Потребуем, чтобы функция Ψ подчинялась условию

$$\Psi^+\left(-\frac{1}{\lambda}, \bar{z}_i, z_i\right) = \Psi^{-1}(\lambda, z_i, \bar{z}_i) \tag{6}$$

при этом для $n = -1$ имеем

$$\Psi = \sqrt{1 + |A|^2} + \lambda f A + \frac{1}{\lambda} f A^+, \qquad \text{где } A^2 = 0 \tag{7}$$

и $A\bar{A} + \bar{A}A = 1$. Из условия отсутствия в выражении $\left(\lambda \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\Psi\Psi^{-1}$ полюсов при $\lambda = 0$ и полюсов выше первого порядка при $\lambda = \infty$, получим

$$A = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{bmatrix} ab & a^2 \\ -b^2 & -ab \end{bmatrix},$$

где $a(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ и $b(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ – произвольные аналитические функции $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$. Для f имеем

$$\frac{\sqrt{1+|f|^2}}{f} = \frac{z_1\left(a\frac{\partial b}{\partial \bar{z}_2} - b\frac{\partial a}{\partial \bar{z}_2}\right) - z_2\left(a\frac{\partial b}{\partial \bar{z}_1} - b\frac{\partial a}{\partial \bar{z}_1}\right) + c(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{|a|^2 + |b|^2}, \tag{8}$$

где $c(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ – также произвольная функция $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$. Условие разрешимости алгебраического уравнения (8) позволяет снизить произвол с трех функций двух переменных до восьми констант. В общем виде

$$a = a_{11}(\bar{z}_1 - a_0) + a_{12}(\bar{z}_2 - b_0),$$
$$b = a_{21}(\bar{z}_1 - a_0) + a_{22}(\bar{z}_2 - b_0),$$
$$c = \kappa^2 - \bar{a}_0(\bar{z}_1 - a_0) - \bar{b}_0(\bar{z}_2 - b_0).$$

Константа κ соответствует размеру инстантона, константы a_0, b_0 – его положению, а унитарная матрица a_{ij} повороту инстантона относительно системы координат.

Для вычисления n-инстантонных решений мы применили рекуррентную процедуру, позволяющую по N-инстантонной матрице Ψ_N найти Ψ_{N+1}-инстантонную, представляя ее в виде $\Psi_{N+1} = \tilde{\Psi}\Psi_N$, где Ψ – матрица вида (7), по-прежнему определенная с точностью до трех произвольных функций комплексных переменных. Вычисления, проведенные явно для случаев $N = 1, 2$ показали, что и теперь с учетом ограниченности решения матрица $\tilde{\Psi}$ зависит от восьми независимых констант. С учетом упомянутой теоремы Шварца это позволяет нам надеяться, что мы нашли полные n-инстантонные решения.

Авторы выражают глубокую благодарность С.В.Манакову, В.Мацаеву, А.М.Полякову и Л.Д.Фаддееву за полезное обсуждение и А.Аринштейну за помощью в вычислениях.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 мая 1977 г.

Литература

[1] M.Y.Ablowitz, D.I.Kaup, A.C.Newell, H.Segur. Studies in Appl. Math. 53, 249, 1974.

[2] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Функциональный анализ и его приложение, 8, стр. 43, 1974.

[3] A.Belavin. A.Polyakov, A.Shwartz, Y.Tyupkin. Phys. Lett., 59B, 85, 1975.

[4] A.Polykov. Nordita preprint, 1976.

[5] Д.Бурланков, В.Дутышев. Доклад на сессии отделения ядерной физики, АН СССР, октябрь, 1976.

[6] E.Witten. Harvard preprint, 1976.

[7] G.'t Hooft. Unpublished.

[8] В.Е.Захаров. Доклад на конференции памяти И.Г.Петровского. Москва, МГУ, январь, 1976.

[9] А.Б.Шабат. Доклад на конференции памяти И.Г.Петровского. Москва, МГУ, январь, 1976.

[10] A.Shwartz. Phys. Lett., 67B, 172, 1977.