Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 10, стр. 549 – 553 *20 мая 1978 г.*

ОБ ОДНОМЕРНОМ КОЛЛАПСЕ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

А.Г.Литвак, А.М.Сергеев

На примере верхнегибридных квазипотенциальных плазменных волн показано существование одномерного коллапса колебаний в системах, описываемых уравнением Шредингера с нелокальной нелинейностью.

В работе рассматриваются особенности самовоздействия квазимонохроматических колебаний в одномерных физических системах, которые описываются модифицированным нелинейным уравнением Шредингера вида

$$- i\frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2} + a e|e|^2 - \beta e\frac{\partial^2 |e|^2}{\partial \xi^2} = 0 . \qquad (1)$$

Это уравнение отличается от широко известного уравнения Шредингера с локальной нелинейностью ($\beta = 0$) наличием эффекта одномерного коллапса – эффекта "разрушения" аналитических решений, связанного с возникновением за конечное время сингулярности.

Уравнение (1) справедливо, в частности, для пакетов ленгмюровских колебаний в изотропной плазме, движущихся со сверхзвуковой скоростью для различных типов высокочастотных квазипотенциальных волн (гибридных и циклотронных), распространяющихся в замагниченной плазме низкого давления перпендикулярно постоянному магнитному полю, а также для экситонов в одномерных решетках (последнее показано в [1]).

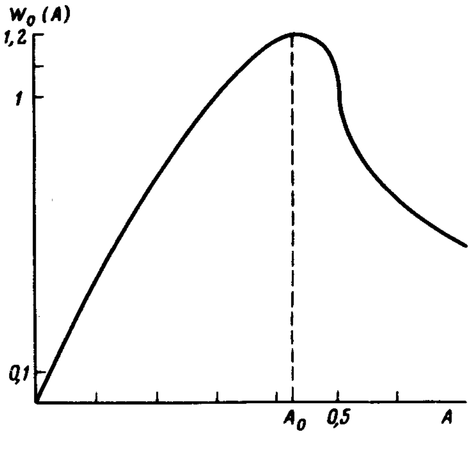
Проиллюстрируем процедуру получения уравнения (1) на примере верхнегибридных квазипотенциальных колебаний. Представим уравнение для комплексной амплитуды электрического поля волны

$$E_{\text{вч}} = \tfrac{1}{2}[E(x, t)\exp(i\omega t - ikx) + \text{к.с.}]$$

в системе координат, связанной с групповой скоростью u, в виде

$$-2i\omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \gamma v_{Te}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - (\omega_{pe}^2 n + 2\omega_{He}^2 h)E = 0. \qquad (2)$$

Здесь n и h медленные (в масштабе $2\pi/\omega_0$) относительные возмущения плотности электронов и магнитного поля, возникающие под действием силы Миллера; ω_{pe}, ω_{He} – ленгмюровская и электронная циклотронная частоты соответственно; $\omega_0 = (\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2)^{1/2}$, $\omega - \omega_0 << \omega_0$, $\xi = x - ut$, $u = \dfrac{\gamma v_{Te}^2 k}{\omega}$, $\gamma = \dfrac{3\omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 - 3\omega_{He}^2}$. Уравнение (2) рассматривается в области нормальной дисперсии колебаний ($\omega_{pe}^2 > 3\omega_{He}^2$) при выполнении условий на пространственный масштаб L_E амплитуды поля: $L_E^2 >> r_{He}^2$ (r_{He} – циклотронный радиус электронов).



В случае малых возмущений $n << 1$, $h << 1$ их зависимость от амплитуды E можно описывать с помощью линеаризованной системы уравнений двухжидкостной гидродинамики бесстолкновительной плазмы, дополненной силой Миллера. Если $u^2 << v_A^2$, $\tau_E^2 \omega_{He}\omega_{Hi} >> 1$ (τ_E – временно́й масштаб в системе групповой скорости), то несложно получить, что

$$n = -\frac{\psi}{v_A^2} + L_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{\psi}{v_A^2}\right), \qquad h = -\frac{\psi}{v_A^2}, \qquad (3)$$

где $v_A^2 = \dfrac{H_0^2}{4\pi M N_0}$, $L_0 = \dfrac{c}{\omega_{pe}}$, $\psi = \dfrac{|E|^2}{16\pi M N_0}$. В безразмерных переменных (2) и (3) сводятся к (1) с $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Рассмотрим сначала стационарные решения (1) вида $e = \epsilon(\xi)\exp(-iA^2\tau)$ на примере случая $\alpha = 1$, $\beta = 1$[1]. Нетрудно показать, что для интегральных кривых на фазовой плоскости ϵ, $d\epsilon/d\xi$ получается уравнение:

$$\left(\frac{d\epsilon}{d\xi}\right)^2 = \frac{A^2\epsilon^2(1-\epsilon^2/2A^2)+C}{1-2\epsilon^2}, \tag{4}$$

где C — постоянная интегрирования. Для уединенных решений (солитонов), которым соответствует $C = 0$, можно записать аналитическое выражение:

$$\pm A\xi = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-\epsilon^2/2A^2}+\sqrt{1-2\epsilon^2}}{\left|\sqrt{1-\epsilon^2/2A^2}-\sqrt{1-2\epsilon^2}\right|} - 2A\ln\frac{\sqrt{1-2\epsilon^2}+\sqrt{2}\sqrt{2A^2-\epsilon^2}}{\sqrt{|1-4A^2|}} \tag{5}$$

Анализ интегральных кривых показывает, что при $A \gtrsim ½$ солитоны имеют особенность производной при $\xi = 0$ ("остроконечные" солитоны)[2]. При $A << ½$ вкладом нелокальной нелинейности можно пренебречь:

$$\epsilon(\xi) = \sqrt{2}A\,\mathrm{ch}^{-1}(A\xi). \tag{6}$$

При $A >> ½$ для "остроконечных" солитонов имеем [2]:

$$\pm A\xi = \mathrm{arch}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\epsilon}\right) - \sqrt{1-2\epsilon^2}. \tag{7}$$

Для уединенных аналитических решений оказывается справедлив известный критерий [3], согласно которому такие решения являются устойчивыми, если выполнено условие

$$\frac{dW_0}{dA^2} > 0 \tag{8}$$

где $W_0 = \int \epsilon^2(\xi)\,d\xi$ — полная энергия солитона. Выражение для $W_0(A)$

---

[1] Стационарные решения системы (2), (3) рассматривались в [2] для частного случая сильно нелокальной нелинейности $L_E << L_0$.

[2] Очевидно, что возникающая особенность снимается при учете вязкости или нелинейной диссипации.

имеет вид

$$W_0(A) = \frac{1}{2}(1 - 4A^2)\ln\frac{1+2A}{|1-2A|} + 2A. \qquad (9)$$

Согласно зависимости $W_0(A)$, приведенной на рисунке, существует предельное значение амплитуды $\sqrt{2}A_0$ ($A_0 \approx 0{,}415$), отделяющее устойчивые решения $A < A_0$ от неустойчивых аналитических решений. Неустойчивыми должны быть и "остроконечные" солитоны[1].

При исследовании динамики произвольных начальных распределений можно воспользоваться интегралами уравнения (1) – законами сохранения числа квантов и гамильтониана системы:

$$I_1 = \int |e|^2 d\xi, \qquad (10)$$

$$I_2 = \int\left[\left|\frac{\partial e}{\partial \xi}\right|^2 - \frac{a}{2}|e|^4 - \frac{\beta}{2}\left(\frac{\partial |e|^2}{\partial \xi}\right)^2\right]d\xi. \qquad (11)$$

Из (1), (10), (11) следует интегральное соотношение:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\int \xi^2|e|^2 d\xi = 8I_2 + 2\int\left[a|e|^4 - \beta\left(\frac{\partial |e|^2}{\partial \xi}\right)^2\right]d\xi. \qquad (12)$$

Для $\beta = 1$, $a = -1$ эволюция любого распределения с $I_2 < 0$ приводит к возникновению сингулярности, связанной с обострением профиля $e(\xi)$. Для $a = 1$ локальная нелинейность тормозит образование особенности решения. Но если в начальном распределении член с локальной нелинейностью несуществен, то оказывается возможным построить автомодельные "схлопывающиеся" решения.

Для этого представим e в виде $e = a\exp(-i\phi)$ и рассмотрим систему уравнений для действительных амплитуды и фазы:

$$\frac{\partial a^2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(2a^2\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right) = 0, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + a^2 - \frac{\partial^2 a^2}{\partial \xi^2}. \qquad (14)$$

---

[1] Строго доказать (8) для решений с особенностью не удается, однако его можно рассматривать как асимптотику решения при $A \to 1/2$.

Будем искать решение (13), (14) в геометрооптическом приближении, т. е. пренебрегая членом $\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}$, и без учета локально нелинейного члена a^2. Получающаяся при этом система обладает автомодельными решениями, имеющими для $v = a^2$ и $u = \partial\phi/\partial\xi$ следующий вид:

$$U = (\tau_0 - \tau)^{-3/5} U_0(\eta), \qquad \eta = \frac{\xi}{(\tau_0 - \tau)^{2/5}} . \tag{15}$$
$$V = (\tau_0 - \tau)^{-2/5} V_0(\eta),$$

Соответствующее приближение автомодельное распределение интенсивностей является параболой четвертого порядка:

$$V_0 = \begin{cases} (\eta_0^2 - \bar{\eta}^2)^2, & \bar{\eta} \leq \eta_0; \\ 0, & \bar{\eta} > \eta_0; \end{cases} \qquad \bar{\eta} = \frac{\eta}{(200)^{1/4}} . \tag{16}$$

Существенно, что найденное автомодельное решение при "схлопывании" сохраняет полную энергию, а отброшенные в (14) члены, в том числе и дифракционный $(\partial^2 a/\partial\xi^2)$, остаются малыми вплоть до момента образования особенности $\tau = \tau_0$. Очевидно, в реальной системе "схлопывание" должно приводить к появлению диссипации.

Таким образом, в условиях действия нелокальной нелинейности оказывается возможным коллапс одномерных распределений высокочастотных плазменных колебаний. Этот вывод справедлив, в частности, и для пакетов ленгмюровских колебаний в изотропной плазме, движущихся со сверхзвуковой скоростью, для которых возникновение нелокальной нелинейности ($\alpha = -1$, $\beta = 1$,) связано с нарушением квазинейтральности возмущений плотности электронов и ионов под действием пондеромоторной силы.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 февраля 1978 г.

Литература

[1] A.Nakamura. J. Phys. Soc., Japan, **42**, 1824, 1977.

[2] M.Porcolab, M.V.Goldman. Phys. Fluids, **19**, 872, 1976.

[3] А.А.Колоколов. Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 17, 1332, 1974.