Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 10, стр. 569 – 572 *20 мая 1978 г.*

О ТРЕХМЕРНЫХ СОЛИТОНАХ В HeII

С.В.Иорданский, А.В.Смирнов

Показано, что при положительной дисперсии в He II могут распространяться трехмерные стационарные волновые пакеты – солитоны. Найдено численное решение уравнения, описывающего такие пакеты и вычислена соответствующая ветвь спектра возбуждений. Рассматривается вопрос о возбуждении солитона электромагнитной волной.

Согласно экспериментальным данным по затуханию звука [1, 2] фононная часть спектра He II имеет положительную дисперсию при малых давлениях. [1]

Нелинейность среды может остановить расползание волновых под влиянием дисперсии. В одномерном случае нелинейные уравнения гидродинамики He II при $T = 0$ при любом знаке дисперсии сводятся к уравнению Кортевега – де Вриза. Поэтому в He II всегда существуют одномерные солитоны. Ниже мы покажем, что при положительной дисперсии в He II могут существовать трехмерные аксиально-симметричные солитоны, распространяющиеся со скоростью меньшей, чем звуковая. Противоположный случай невозможен из-за излучения фононов.

В дальнейшем мы ограничимся гидродинамическим приближением и будем рассматривать случай $T = 0$. Уравнения гидродинамики могут быть записаны в гамильтоновой форме, если в качестве канонических переменных выбрать плотность ρ и потенциал скорости ϕ. С учетом кубического ангармонизма и дисперсии запишем гамильтониан в виде

$$H = \int d^3r \left\{ (\rho_0 - \rho')\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{c_s^2}{\rho_0}\rho'^2 + \frac{\gamma c_s^2}{\rho_0}(\nabla\rho')^2 + \frac{\beta c_s^2}{\rho_0^2}\frac{\rho'^3}{6} \right\}, \tag{1}$$

где ρ_0 – равновесная плотность, ρ' – отклонение плотности от равновесного значения, c_s – скорость звука, $\beta = \left[\dfrac{2\partial \ln c_s}{\partial \ln\rho} - 1\right]$. Этот гамильтониан приводит к закону дисперсии $\omega = c_s k(1 + \gamma k^2)$.

Будем искать решение в виде аксиально-симметричного пакета, распространяющегося вдоль оси x, так что x – компонента скорости жидкости запишется так:

$$u_x = \partial\phi/\partial x = -2b[\beta + 3]^{-1} c_s f(b, \xi, \eta), \tag{2}$$

$$\xi = b^{1/2}(2\gamma)^{-1/2}(x - vt), \quad \eta = b(2\gamma)^{-1/2} r_\perp, \quad v = c_s\left(1 - \frac{b}{2}\right). \tag{3}$$

В низшем порядке по $b << 1$, что соответствует размерам солитона много больше атомных, уравнения гидродинамики сводятся к уравнению

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = - \frac{\partial^2 f^2}{\partial \xi^2} \quad (4)$$

(Это уравнение соответствует уравнению Кадомцева – Петвиашвили). Таким образом, солитон представляет собой возмущение с характерным поперечным размером $\sqrt{2\gamma}/b$ много больше продольного $\sqrt{2\gamma}/\sqrt{b}$.

Уравнение (4) решалось численно методом, предложенным Петвиашвили для аналогичного двумерного уравнения [3], с той лишь разницей, что по переменной η вместо преобразования Фурье решалось разностное уравнение. Изолинии функции f, четной по попеременной ξ приведены на рис. 1.

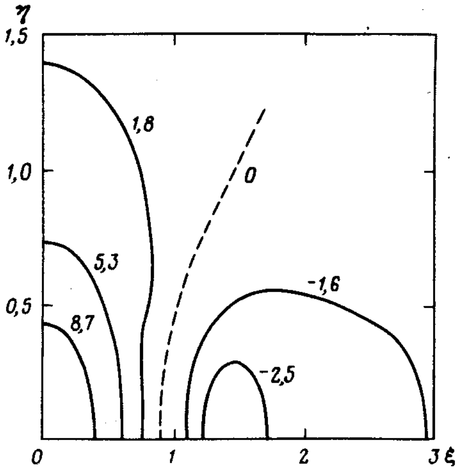

Рис. 1. Изолинии функции $f(\xi, \eta)$. В начале координат f имеет максимум, равный 12,2, в точках ($\eta = 0$, $\xi = \pm 1,4$) – минимум, равный – 3,1

Существование такого решения определяет дополнительную ветвь в спектре возбуждений He II. Знание функции f позволяет вычислить энергию и импульс солитона как функции его скорости. Выражение для импульса солитона

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_x = \int d^3 r \, (\rho_0 + \rho') \, u_x \quad (5)$$

формально расходится, так как функция f имеет асимптотику дипольного характера на бесконечности. Эту расходимость можно устранить, если представить, что солитон медленно ускоряется и растет, начиная с момента времени t_0. В момент t на расстояниях $R > c_s(t - t_0)$ от точки начала ускорения скорость жидкости будет определяться начальным видом солитона. Так как интеграл от линейного члена в $\mathcal{P}$ сводится к интегралу по поверхности, то этот член не даст вклада в изменение импульса.

Для определения энергии солитона E как функции импульса необходимо исключить скорость солитона, используя соотношение $v = \partial E/\partial \mathcal{P}$. Закон дисперсии при больших импульсах с точностью до членов пропорциональных $1/\mathcal{P}^2$ имеет вид

$$E(\mathcal{P}) = c_s \mathcal{P} + \frac{2^6 \rho_0^2 c_s^3 \gamma^3}{\mathcal{P}(\beta+3)^4} I^2 + \text{const}, \quad I = 2\pi \int f^2(\xi, \eta)\, d\xi\, \eta\, d\eta. \tag{6}$$

Численное интегрирование дает величину $I = 231$. В выражение (6) входит постоянная интегрирования, которая не может быть вычислена теоретически. Можно лишь ожидать, что ее значение не превосходит по порядку величины характерной атомной энергии. На рис. 2 приведена кривая $E(\mathcal{P})$ с const $= 0$. Значения $c_s = 2{,}383 \times 10^4$ *см/сек* и $\beta = 4{,}68$ взяты из работы [4], из которой также взято значение $\gamma = 8 \cdot 10^{-17}$ *см*^{2} при нулевом давлении.

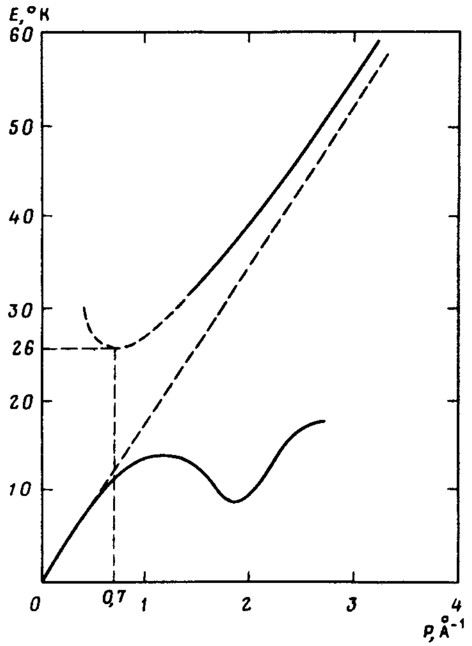

Рис. 2. Спектр солитона, условно продолженный в область, где нарушается гидродинамическое приближение. Для наглядности показан спектр одночастичных возбуждений He II

Солитон представляет собой многочастотное возбуждение больших размеров и с большим временем жизни. Мы рассмотрим возможность возбуждения солитона электромагнитной волной, ограничившись случаем падения света вдоль оси x, причем будем считать, что длина волны света больше продольного размера солитона. Механизм возбуждения состоит в рассеянии на неоднородности, вызываемой солитоном. Угловая зависимость амплитуды рассеяния может быть вычислена в борновском приближении, при этом дипольная особенность на больших расстояниях приводит к тому, что основной вклад в транспортное сечение дает рассеяние назад под углами $\pi - \theta \lesssim b^{1/2}$. Пользуясь видом особенности f на больших расстояниях, можно вычислить главный вклад в транспортное сечение.

Считая, что параметры солитона меняются медленно и он сохраняет свою форму, получим, приравнивая импульс отдаваемый в единицу времени светом при рассеянии изменению импульса солитона:

$$\frac{db}{dt} = - E_0^2\left(\rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_0}\right)^2 \frac{(2\gamma)^{3/2} l\,|\mathbf{q}|^4}{(4\pi)^2 \rho_0 c_s \epsilon} b^{-1/2}, \tag{7}$$

где E_0 — амплитуда электрического поля, $\mathbf{q}$ — волновой вектор падающей волны света, ϵ — диэлектрическая проницаемость. Уравнение (7) справедливо до тех пор, пока продольный размер солитона не сравнивается с длиной волны света.

В области прозрачности величина $\rho_0 {}^{\partial\epsilon}/_{\partial\rho} \approx 0{,}05$, что приводит к тому, что для $|\mathbf{q}| = 10^5$ *см*$^{-1}$ при интенсивности излучения 10^6 *вт/см*^{2} коэффициент перед $b^{-1/2}$ в правой части (7) имеет порядок 10^{-6}*сек*$^{-1}$. Таким образом, попытка возбудить солитон светом в области прозрачности представляется малоэффективной. Нужно отметить, что при повышении частоты света условия возбуждения должны улучшаться из-за роста ϵ.

Возможно, более благоприятные условия для возбуждения подобных солитонов существуют в других инертных газах, так как, повидимому, сверхтекучие свойства He II не очень существенны. Однако, в настоящее время известен знак величины γ только в HeII .

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 апреля 1978 г.

Литература

[1] B.M.Abraham et al. Phys. Rev., A1, 250, 1970.

[2] R.P.Roach. Phys. Rev. Lett.,25,1002, 1970.

[3] В.И.Петвиашвили. Физика плазмы, 2, 469, 1975.

[4] H.J.Maris.Phys. Rev. Lett.,28, 277, 1972.