Письма в ЖЭТФ, том 27, вып.10, стр. 590 – 594 20 мая 1978 г.

ЛЕПТОНЫ И КВАРКИ В МОДЕЛИ КВАТЕРНИОНОВ

Дж. Л. Чкареули

Построена калибровочная теория кватернионных полей спина 0, 1/2 и 1. Показано, что эта теория эквивалентна обычной теории со спонтанно нарушенной $[SU(2)\times U(1)]_{loc}\times SU(2)_{glob}$-симметрией и изодублетной структурой мультиплетов материальных полей – фермионов (кварков и лептонов) и скаляров Хиггса; в теории естественно реализуется механизм ГИМ и имеет место нарушение CP-инвариантности.

В настоящей статье мы хотели бы обратить внимание на возможность описания в модели кватернионов (далее Q-модель) систематики лептонов и кварков и рассмотреть калибровочную версию этой модели в качестве единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий[1].

Рассмотрим Q-модель свободного фермионного поля

$$L_\psi = -\frac{1}{2}\,\bar{\psi}\gamma\partial\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi} + Q.c. \tag{1}$$

где поле ψ, по предположению, кватернион $\psi = \psi_0 + e_k\psi_k$, e_k ($k = 1, 2, 3$) – три мнимые Q-единицы с таблицей умножения $e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}e_k$, $e_k^{Q.c} = -e_k$ ("$Q.c$" означает кватернионное, а "+" – полное, кватернионное и эрмитовское, сопряжение; $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_4$). Массовый параметр в лагранжиане (1) также является кватернионом; при этом предполагается $m^+ = m$. Состояния, соответствующие полю ψ, имеют аналогичный вид $\psi = \psi_0 + e_k\psi_k$, где компоненты $\psi_{0,k}$ – в общем случае комплексные функции пространственно-временных координат. Для того, чтобы норма такого состояния была вещественным положительным числом достаточно

---

[1] Ряд попыток применения кватернионов с целью получения изотопической классификации мезонов и барионов был предпринят в начале 60-х годов [1–3], особенно в связи с развитием кватернионной квантовой механики [1, 2].

(как легко убедиться непосредственно, пользуясь правилом умножения кватернионов) принять $\psi_{o,k} = |\psi_{o,k}| e^{i\delta}$, т.е. $\delta_o = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$ (условие квазивещественности кватерниона). Нетрудно видеть, что в этом случае выполняется и соотношение композиции обязательное в квантовой механике [1,2], – если $\psi = \psi_1\psi_2$, то норма $N(\psi) = N(\psi_1)N(\psi_2)$.

Лагранжиан L_ψ инвариантен относительно глобальных преобразований

$$\psi \to q\psi \,, \tag{2а}$$

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \,, \tag{2б}$$

где q – нормированный кватернион, $q = \exp[e_k\theta_k]$. Инвариантность относительно преобразований (2б) – следствие квазивещественности кватерниона состояния ψ. Перейдем теперь к локальным преобразованиям, т.е. пусть фазы θ и θ_k ($k = 1, 2, 3$) зависят от 4-координат. Тогда, следуя стандартному рецепту, построим ковариантную производную вида

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - g C_\mu\psi - g' B_\mu\psi \,, \; C_\mu = i e_k C_\mu^k \tag{3}$$

с законом преобразования (2). Отсюда прямо следуют законы преобразования калибровочных полей C_μ и B_μ

$$C'_\mu = qC_\mu q^{-1} + \frac{1}{g}\partial_\mu q q^{-1}; \; B'_\mu = B_\mu + \frac{i}{g'}\partial_\mu\theta \,. \tag{4}$$

Калибровочно-инвариантный лагранжиан полей ψ, C_μ и B_μ имеет вид

$$L = -\frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu\psi - \frac{1}{2}m)\bar{\psi}\psi - \frac{1}{8}(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu + g[C_\mu, C_\nu])^2 -$$

$$-\frac{1}{8}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + Q.c. \,. \tag{5}$$

Распишем теперь в L поля ψ и C_μ и параметр m покомпонентно (при этом удобно принять $\psi = \psi_o + ie_k\psi_k$, $m = m_o + ie_k m_k$) и введем матрицы Тиомно [3] $F^{(\pm)i}$ с элементами ($i, j, k = 1, 2, 3$)

$$F_{oo}^{(\pm)i} = 0 \,, \; F_{ok}^{(\pm)i} = F_{ko}^{(\pm)i} = \mp\delta_{ik} \,, \; F_{jk}^{(\pm)i} = -i\epsilon_{ijk} \,, \tag{6а}$$

$$F^{(\pm)i}F^{(\pm)j} = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}F^{(\pm)k} \,, \; [F^{(+)i}, F^{(-)j}] = 0. \tag{6б}$$

Унитарно преобразовав [3] матрицы $F^{(\pm)i}$ вместе с полями $\hat{\psi} = \begin{pmatrix}\psi_o \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3\end{pmatrix}$ к матрицам (соотношения (6б) гарантируют существование такого унитарного преобразования T; σ^i – матрицы Паули)

$$\eta^i = \sigma^i \times 1 = TF^{(+)i}\,T^{-1},\ \tau^i = 1 \times \sigma^i = TF^{(-)i}\,T^{-1},\ [\eta^i, \tau^j] = 0 \quad (7)$$

("$\times$" означает внешнее произведение) и полям $S = T\hat{\psi}$, будем иметь

$$L = -\bar{S}\gamma_\mu[\partial_\mu - igC^i_\mu \tau^i - ig' B_\mu]S - m_0 \bar{S}S + m_i S\eta^i S - \frac{1}{4}(C^i_{\mu\nu} +$$

$$+ gC^j_\mu C^k_\nu \epsilon_{ijk})^2 - \frac{1}{4}B^2_{\mu\nu}. \quad (8)$$

Проведем симметричный анализ. Группа инвариантных преобразований лагранжиана (8) задается преобразованиями

$$S \to \exp[i\frac{\tau^k}{2}\theta^k]S,\ \tau^k = \begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}, \quad (9а)$$

$$S \to \exp[i\theta] \quad (9б)$$

(мы использовали $[\eta^i, \tau^j] = 0$). Это и фиксирует трансформационные свойства полей S. Очевидно, что при преобразованиях (9а) "перемешиваются" между собой попарно две верхние и две нижние компоненты в 4-столбце S, т.е. S ведет себя как совокупность двух независимых изоспиноров S_1 и S_2, $S = \begin{pmatrix}S_1\\ S_2\end{pmatrix}$. В отсутствие члена $m_i \bar{S}\eta^i S$ симметрия лагранжиана возрастает от $[SU(2)\times U(1)]_{loc}$ (см. (9)) до $[SU(2)\times U(1)]_{loc}\times \times SU(2)_{glob}$ ($SU(2)_{glob}$ "смешивает" между собой дублеты S_1 и S_2) и, более того, возникает изотопическое вырождение. Изоспиновые свойства полей неопределены: два дублета – синглет и триплет. Массовый член снимает вырождение.

Для скалярного Q-поля со стандартным лагранжианом, – включающим массовый член и член самодействия с параметрами, соответственно, $m^2 = (m^2)_0 + ie_k(m^2)_k$, $h = h_0 + ie_k h_k$ / $(m^2)^+ = m^2$, $h^+ = h$ (все сказанное о поле ψ остается в силе: *а*) закон преобразования (2)[2]; *б*) вид ковариантной производной (3); *в*) изодублетная структура полей D_1 и D_2, где $\begin{pmatrix}D_1\\ D_2\end{pmatrix} \equiv D = T\hat{\phi}$, $\hat{\phi} = \begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$ Детальное рассмотрение потенциала Хиггса [4] в лагранжиане полей D_1 и D_2

$$P_D = (m^2)_0 D^+D + (m^2)_k D^+\eta^k D + h_0[(D^+D)^2 + (D^+\eta^k D)^2] +$$

---

[2] "Векторный" закон преобразования $\phi \to q\phi q^{-1}$ приводил бы к отсутствию кватернионного массового параметра у поля ϕ.

$$+ 2h_k(D^+D)(D^+\eta^kD) \qquad (10)$$

обнаруживает, что вакуум в теории нестабилен и поля D_1 и D_2 развивают вакуумные ожидания: $< D_1 > = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, $< D_2 > = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{i\epsilon}$ (наличие относительной фазы ϵ обусловлено комплексность массовой матрицы D-полей). В результате мы получаем теорию со спонтанно-нарушенной $SU(2) \times U(1)$ калибровочной симметрией с векторными массивными полями $\frac{C^1_\mu \pm i C^2_\mu}{\sqrt{2}}$, $g C^3_\mu + g' B_\mu / \sqrt{g^2 + g'^2})$, безмассовым полем $-g' C^3_\mu + g B_\mu / \sqrt{g^2 + g'^2})$, и квартетом фермионов (число этих квартетов в общем случае произвольно) в виде пары дублетов. В теории, кроме того, после процедуры Хиггса [4] остается пять массивных скалярных бозонов.

Дальнейшая специализация полученной теории зависит уже только от пространственных свойств слабого взаимодействия. Если принять законы преобразования (2) только для левоспирального поля ψ_L, а для правоспирального поля ψ_R – лишь простое фазовое преобразование (2б), то мы приходим к модели типа Вейнберга – Салама [4] для двух дублетов частиц, например, лептонов $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}$. Массовый член поля ψ при этом выпадает из лагранжиана (5) и массы лептонов возникают из инвариантной связи

$$G(\bar{\psi}_L \phi \psi_R + \psi_R \phi^+ \psi_L] + Q.c., \quad G = G_0 + i e_k G_k \ (G^+ = G) \qquad (11)$$

в результате вакуумного сдвига скалярного поля ϕ. Включение в модель четверки кварков u, d, s, c связано с введением в теорию еще одного кватерниона ψ' [3]. Наличие двух кварковых дублетов в ψ' гарантирует естественную реализацию механизма Глэшоу – Илиопулоса – Майани (ГИМ) [4] при всех типах смешивания кварков, обусловленных связью (11). Эта связь нарушает $SU(1)_{glob}$-симметрию и составляет базу для вычисления угла Кабиббо:, кром того, она, в силу наличия нетривиальной относительной фазы в вакуумных ожиданиях полей D_1 и D_2, ведет к суперслабому нарушению СР-инвариантности за счет обмена бозонами Хиггса. Эти важные приложения мы предполагаем рассмотреть отдельно.

Автор искренне признателен А.А.Ансельму, Д.Д.Дьяконову, О.В.Канчели, Л.Б.Окуню и особенно В.И.Огиевецкому за обсуждения результатов.

Институт физики
Академии наук Грузинской ССР

Поступила в редакцию
27 февраля 1978 г.

---

[3]Новые, тяжелые лептоны и кварки согласно нашей модели располагаются в дополнительных квартетах (индуцированных кватернионами ϕ и ϕ', соответственно) по-прежнему с дублет-дублетным наполнением.

Литература

[1] T.Kaneno. Prog. Theor. Phys., 23, 17, 1960.

[2] D.Finkelstein, J.M.Jauch et al. J. Math. Phys., 3, 207, 1962.

[3] J.Tiomno. Theoretical Physics, 1963, Vienna, p. 251.

[4] S.Weinberg. Rev. Mod. Phys., 46, 255, 1974.